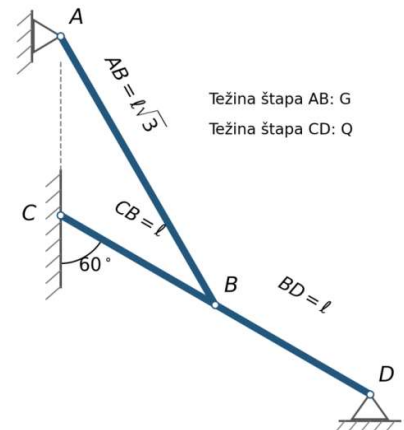


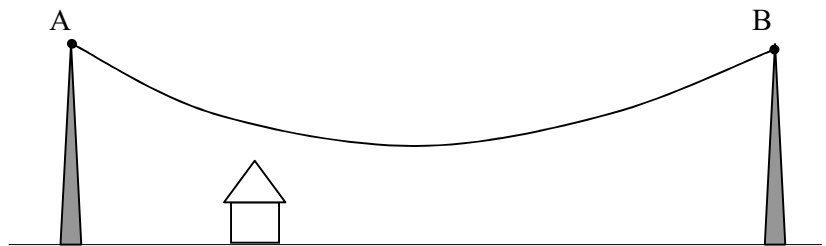


MEHANIKA

1. Homogeni štap AB, dužine $\ell\sqrt{3}$ i težine G , zglobovno je vezan u tački A, a oslanja se u tački B na sredinu homogenog štapa CD, dužine 2ℓ i težine Q . Štap CD je u tački D zglobovno vezan za pod, a u tački C oslanja se na vertikalni zid, zaklapajući sa pravcem zida ugao 60° . U ravnotežnom položaju tačke A i C nalaze se na istoj vertikali. Odrediti otpore zglobova A i D, otpor zida u tački C i uzajamni pritisak štapova u dodirnoj tački B. Sistem je prikazan na slici.

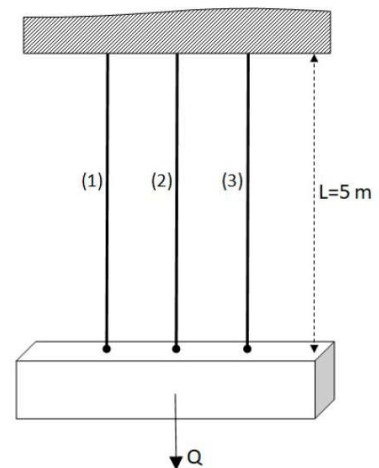


2. Provodnik nadzemnog voda (uže) je zategnut između tačaka A i B koje se nalaze u istoj horizontalnoj ravni na rastojanju $AB=300$ m. Analizirani vod prelazi preko ravnog terena na kojem se nalazi kuća čija je visina gornje ivice (slemena) krova $d=7$ m. Kuća se nalazi ispod trase voda na udaljenosti 80 m od stuba A. Proračunati minimalne visine tačaka vešanja A i B, tako da pri svim temperaturama provodnika u opsegu -20°C do 60°C , bez dodatnog opterećenja, provodnik ne bude mehanički preopterećen, a da rastojanje provodnika od ivice krova bude bar 4 m, a od površine zemlje bar 7 m.



Parametri užeta su: $\gamma=2,7 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$,
 $E=7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\sigma_d=7 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, $\alpha=22 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$.

3. Homogena betonska prizma težine $Q = 12 \text{ kN}$ slobodno visi okačena za tri vertikalne sajle koje je održavaju u horizontalnoj ravni. Srednja sajla je napravljena od čelika, dok su bočne sajle identične i napravljene od aluminijuma. Sajle su gornjim krajem vezane za horizontalni plafon. Zbog netačnosti izrade, čelično uže (2) je u neopterećenom stanju, mereno pri temperaturi $t_0 = 20^\circ\text{C}$, duže od aluminijumskih užadi za $\Delta_0=1 \text{ mm}$. Proračunati sile i naprezanja u užadima pri temperaturi $t_0=20^\circ\text{C}$, a zatim odrediti pri kojoj temperaturi sajli će sile u svim sajlama biti jednake. U proračunima pretpostaviti da sve tri sajle imaju istu temperaturu.



Parametri aluminijumskih užadi (1 i 3) su:

$$A_1 = A_3 = A = 100 \text{ mm}^2, E_1 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \sigma_{d1} = 7 \cdot 10^7 \text{ Pa}, \alpha_1 = 22 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}.$$

Parametri čeličnog užeta (2) su:

$$A_2 = A = 100 \text{ mm}^2, E_2 = 21 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \sigma_{d2} = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa}, \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}.$$

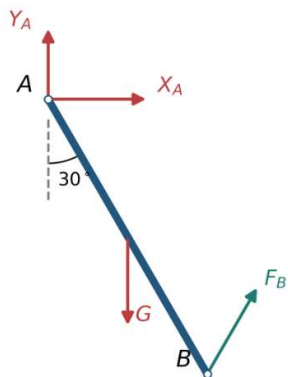
Dužina zategnutih užadi je $L = 5 \text{ m}$.

Napomena: Ispit traje 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum rade zadatak 3 i jedan od preostala dva zadatka po izboru. Ostali studenti rade sve zadatke. Potrebno je na svakom zadatku ostvariti minimalno

MEHANIKA
Rešenja zadataka

1. Sila F_B je upravna na štap CD, a reakcija zida F_C je horizontalna. Na štap CD u tački B deluje suprotna sila F'_B , istog intenziteta: $F'_B = F_B$. Težina G deluje u sredini štapa AB, dok težina Q deluje u tački B.

Štap CD zaklapa ugao 30° sa horizontalom. Horizontalna projekcija CB je jednaka horizontalnoj projekciji AB i to $\ell\sqrt{3}/2$, pa štap AB zaklapa ugao 30° sa vertikalom. Pozitivni momenti uzeti su suprotno smeru kazaljke na satu.



$$\Sigma X = 0: X_A + F_B/2 = 0$$

$$\Sigma Y = 0: Y_A - G + (\sqrt{3}/2)F_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0: (3/2)\ell F_B - (\sqrt{3}/4)\ell G = 0$$

$$F_B = \sqrt{3}G/6; \quad X_A = -\sqrt{3}G/12; \quad Y_A = 3G/4$$

Za štap CD sila F'_B deluje ulevo i nadole, upravno na štap. Njena momentna ruka u odnosu na D jednaka je ℓ . Momentna ruka reakcije zida je ℓ , a težine Q jednaka je $\ell\sqrt{3}/2$.

$$\Sigma X = 0: F_C + X_D - F'_B/2 = 0$$

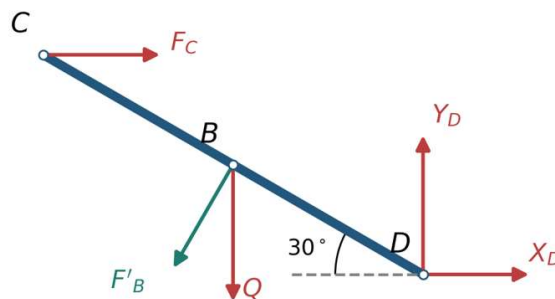
$$\Sigma Y = 0: Y_D - Q - (\sqrt{3}/2)F'_B = 0$$

$$\Sigma M_D = 0: -\ell F_C + \ell F'_B + (\sqrt{3}/2)\ell Q = 0$$

Uvrštavanjem $F'_B = F_B = \sqrt{3}G/6$ dobijaju se preostale reakcije:

$$F_C = \sqrt{3}(G + 3Q)/6$$

$$X_D = -\sqrt{3}(G + 6Q)/12; \quad Y_D = Q + G/4$$



Rezultujuća reakcija zglobova:

$$F_A = \sqrt{(X_A)^2 + (Y_A)^2} = \sqrt{21}G/6$$

$$F_D = \sqrt{(X_D)^2 + (Y_D)^2} = \sqrt{[3(G + 6Q)^2 + 9(G + 4Q)^2]}/12$$

2. Da bi stubovi bili što niži potrebno je provodnik što više zategnuti, ali tako da se ne ugrozi dozvoljeno mehaničko naprezanje pri svim zadatim radnim stanjima. Najveće naprezanje u provodniku se javlja pri minimalnoj temperaturi, odnosno $t_0=t_{\min}=-20^{\circ}\text{C}$, pa je potrebno provodnik potrebno zategnuti da pri ovoj temperaturi ima maksimalno dozvoljeno naprezanje, odnosno $\sigma_0=\sigma_d=7\cdot 10^7\text{ Pa}$. Najveći ugib provodnika se javlja pri $t=t_{\max}=60^{\circ}\text{C}$ i ona je mjerodavna za proračun minimalnih visina tačaka vješanje.

Proračun ugiba provodnika na maksimalnoj temperaturi:

$$f_{\max}^3 - f_{\max} \frac{3}{2} l^2 \left[\frac{\gamma^2 l^2}{6\sigma_0^2} + \alpha(t_{\max} - t_0) - \frac{\sigma_0}{E} \right] - \frac{3}{4} \frac{\gamma l^4}{E} = 0$$

$$f_{\max} - 44,48 f_{\max} - 146,45 = 0$$

$$f_{\max} = 7,934 \text{ m.}$$

Minimalna visina stuba sa stanovišta minimalne udaljenosti provodnika od zemlje je:

$$H_{1\min} = S_1 + f_{\max} = 7 + 7,934 = 14,934 \text{ m}$$

Minimalna visina stuba sa stanovišta minimalne udaljenosti provodnika od slemena kuće je:

$$H_{2\min} = d + S_2 + f_{\max} (1 - x^2/l^2) = 7 + 4 + 7,934(1 - 70^2/150^2) = 17,21 \text{ m}$$

Kritičnije je drugo ograničenje, pa je minimalna visina tačaka vješanja provodnika 17,21 m.

3. Sistem je statički neodređen. Zbog simetrije konstrukcije i opterećenja sile u bočnim užadima su međusobno jednake, pa jednačina ravnoteže glasi:

$$2S_{10} + S_{20} = Q$$

Kada su užad opterećena, dužine svih sajli su međusobno jednake, jer se betonska prizma nalazi uvek u horizontalnom položaju. Ako bi se teg otkao od užadi, došlo bi do skraćanja užadi za odgovarajuće elastično izduženje koje su imala u opterećenom stanju. Dužine neopterećenih užadi su:

$$L_{01} = L_{03} = L - \frac{S_{10}L}{A_1E_1}, \quad L_{02} = L - \frac{S_{20}L}{A_2E_2}$$

Prema uslovu zadatka, razlika dužina neopterećenih užadi pri temperaturi $t_0 = 20^\circ\text{C}$ je poznata i iznosi Δ_0 :

$$L_{02} - L_{01} = \Delta_0$$

Zamenom prethodnih izraza dobija se geometrijski uslov deformacije (dopunska jednačina):

$$\frac{S_{10}L}{A_1E_1} - \frac{S_{20}L}{A_2E_2} = \Delta_0$$

odnosno, uvrštavanjem $S_{20} = Q - 2S_{10}$ iz jednačine ravnoteže:

$$\frac{S_{10}L}{A_1E_1} + \frac{2S_{10}L}{A_2E_2} = \Delta_0 + \frac{QL}{A_2E_2}$$

$$S_{10} = \frac{\Delta_0 + \frac{QL}{A_2E_2}}{\frac{L}{A_1E_1} + \frac{2L}{A_2E_2}} = \frac{1 \cdot 10^{-3} + 2,857 \cdot 10^{-3}}{7,143 \cdot 10^{-7} + 4,762 \cdot 10^{-7}} = 3240 \text{ N}$$

Sile u užadima pri temperaturi $t_0 = 20^\circ\text{C}$ su:

$$S_{10} = S_{30} = 3,24 \text{ kN}, \quad S_{20} = Q - 2S_{10} = 5,52 \text{ kN}$$

Naprezanja u užadima pri analiziranoj temperaturi $t_0 = 20^\circ\text{C}$ su:

$$\sigma_{10} = \sigma_{30} = \frac{S_{10}}{A_1} = \frac{3240}{100 \cdot 10^{-6}} = 3,24 \cdot 10^7 \text{ Pa} < \sigma_{d1}$$

$$\sigma_{20} = \frac{S_{20}}{A_2} = \frac{5520}{100 \cdot 10^{-6}} = 5,52 \cdot 10^7 \text{ Pa} < \sigma_{d2}$$

Zbog različitih koeficijenata temperaturnog širenja materijala, razlika dužina neopterećenih užadi zavisi od temperature. Pri proizvoljnoj temperaturi t ona iznosi:

$$\Delta(t) = L_{02}(1 + \alpha_2\Delta t) - L_{01}(1 + \alpha_1\Delta t) = \Delta_0 + L(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t$$

pri čemu je usvojeno $L_{01} \approx L_{02} \approx L$, jer su elastična izduženja zanemarljivo mala u odnosu na dužinu užadi.

Odnos sila u sajlama zavisiće od temperature zbog različitih modula elastičnosti i temperaturnih koeficijenata širenja materijala. Pri nekoj temperaturi t_x sile u užadima će biti jednake, odnosno pri toj temperaturi važi:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S = \frac{Q}{3} = 4 \text{ kN}$$

S obzirom na to da su dužine sajli u zategnutom stanju jednake, zaključuje se da važi:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L \Rightarrow L_{01} + \Delta L_{1\sigma} + \Delta L_{1\Delta t} = L_{02} + \Delta L_{2\sigma} + \Delta L_{2\Delta t}$$

$$\Delta L_{1\sigma} + \Delta L_{1\Delta t} = \Delta L_{2\sigma} + \Delta L_{2\Delta t} + \Delta_0$$

odnosno:

$$\frac{SL}{A_1 E_1} + L \alpha_1 \Delta t = \frac{SL}{A_2 E_2} + L \alpha_2 \Delta t + \Delta_0$$

Iz prethodne jednačine može da se odredi temperatura pri kojoj će biti ispunjen uslov jednakosti sila u užadima:

$$\Delta t = t_x - t_0 = \frac{1}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} [\Delta_0 - SL(\frac{1}{A_1 E_1} - \frac{1}{A_2 E_2})] = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} - 1,905 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-5}} = -18,10^\circ C$$

Temperatura pri kojoj će sile u užadima biti jednake:

$$\boxed{t_x = t_0 + \Delta t = 1,9^\circ C}$$

Naprezanja pri toj temperaturi iznose $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 4 \cdot 10^7$ Pa, što je manje od dozvoljenih naprezanja oba materijala.