

Poglavlje 4

Trofazna transformacija

4.1 Objašnjenje trofazne transformacije

Proračun prelaznih procesa u trofaznim elektro-enegetskim mrežama vezan je sa računskim teškoćama zbog velikog broja jednačina koje treba rešavati. Da bi se račun pojednostavio, vrši se transformacija jednačina trofaznih mreža u nove, transformisane jednačine u kojima je proračun jednostavniji. U transformisanoj mreži se elementi i promenljive razlikuju od onih u originalnoj mreži. Da bi se odredile originalne električne veličine u stvarnoj mreži, posle završenog proračuna mora se izvršiti inverzna transformacija izračunatih veličina.

Kod trofaznih mreža javljaju se međufazni magnetni i kapacitivni uticaji koji se modeluju međufaznim induktivitetima i međufaznim kapacitivnostima. U slučaju povratnog puta kroz zemlju se mogu pojaviti otpornički elementi van glavne dijagonale koji reprezentuju zajednički povratni put kroz zemlju. Pri pisanju jednačina mreža kod matematičkog modelovanja trofaznih elemenata u matričnom obliku, elementi se opisuju matricama trećeg reda. Elementi na glavnoj dijagonali su fazne impedanse, odnosno admittanse. Elementi van glavne dijagonale su međufazni induktiviteti, kapaciteti ili otpornosti koji reprezentuju zajednički povratni put kroz zemlju.

Ukoliko se posmatraju nadzemni vodovi, predpostavlja se da je izvršena idealna transpozicija faza, tada elementi na glavnoj dijagonali imaju identične vrednosti, a takođe su svi elementi van glavne dijagonale međusobno jednaki. Kod netransponovanih horizontalnih vodova se razlikuje impedanse između dve susedne faze od impedansi udaljenijih faza. U tom slučaju je matrica elementa simetrična, ali se elementi matrice susednih faza razlikuju od elemenata koji odgovaraju udaljenijim fazama. Cilj trofaznih transformacija je da se u jednačinama mreža ovi međufazni uticaji eliminišu.

Jednačine po Omovom zakonu u matričnom obliku za trofazni sistem u opštem slučaju imaju sledeću formu:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Izraz 4.1 se odnosi na ustaljeno stanje, tako da su sve veličine izražene kao kompleksne. U slučaju proračuna prelaznih režima, naponi i struje se izražavaju kao trenutne vrednosti, a elementi mreže se daju preko realnih vrednosti parametara mreže.

Kod svih pasivnih elemenata elektroenergetskog sistema koji nemaju rotacionih delova se može smatrati da je $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32}$ i $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31}$. U tom slučaju se sistem naziva simetričnim. Ukoliko je ispunjeno da su elementi $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{33}$ i $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{13}$, tada se matrica sistema naziva cikličnom, jer idući po vrstama sa leva na desno elementi se ciklično ponavljaju. Nadzemni vod se može modelovati simetričnom i cikličnom matricom elemenata ukoliko je on idealno transponovan (svaka faza ima identičnu geometriju prema zemlji i susednim fazama). Primer simetrične i ciklične matrica trofaznog elementa dat je sledećim izrazom:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_F & \underline{Z}_M & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_F & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_M & \underline{Z}_F \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

gde su:

$\underline{Z}_F$ -sopstvena kompleksna impedansa jedne faze,

$\underline{Z}_M$ -međusobna kompleksne impedansa dve faze.

Kod simetričnog i cikličnog elementa sve sopstvene impedanse su jednake i sve međusobne impedanse su jednake. U skraćenom matričnom obliku se izraz za Omov zakon 4.1 može napisati u sledećoj formi:

$$[U_F] = [Z] \cdot [I_F] \quad (4.3)$$

gde su:

- $[U_F]$ - vektor od tri fazna napona u kompleksnom ili operatorskom domenu,
- $[I_F]$ - vektor od tri fazne struje u kompleksnom ili operatorskom domenu,
- $[Z]$ - matrica reda 3×3 od kompleksnih ili operatorskih impedansi.

Cilj trofaznih transformacija je da se matrice trofaznog elemenata $[Z]$ dijagonalizuje. U tu svrhu se uvode matrica transformacija $[P]$ za napone i $[Q]$ za struje. To su kvadratne nesusingularne matrice trećeg reda čiji su elementi u opštem slučaju mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Ako se pomnoži matična relacija 4.3 sa leve strane matricom $[P]$, dobija se:

$$[P] \cdot [U_F] = [P] \cdot [Z] \cdot [I_F] \quad (4.4)$$

Uvedimo matricu transformacije struja na sledeći način:

$$[I_K] = [Q]^{-1} \cdot [I_F] \quad (4.5)$$

gde su:

- $[Q]^{-1}$ - inverzna matrica transformacije,
- $[I_K]$ - vektor trećeg reda transformisanih struja, koje ćemo nazivati komponentnim strujama.

Uvedimo transformacije vektora napona na sledeći način:

$$[U_K] = [P] \cdot [U_F] \quad (4.6)$$

gde je $[U_K]$ vektor trećeg reda transformisanih napona.

Ako se zamene izrazi za vektore transformisanih električnih veličina, dobija se Omov zakon u matičnom obliku za transformisane veličine.

$$[U_K] = [P] \cdot [Z] \cdot [Q] \cdot [I_K] \quad (4.7)$$

Uvedimo pojam transformisane matrice impedansi:

$$[Z_K] = [P] \cdot [Z] \cdot [Q] \quad (4.8)$$

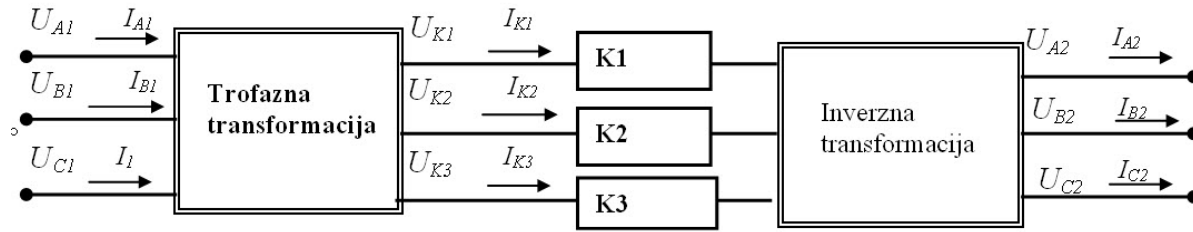
Matrice transformacije treba izabrati tako da transformisana matrica impedansi Z_k bude dijagonalna matrica.

Posle završene transformacije matični izraz 4.1 dobija sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} U_{K_1} \\ U_{K_2} \\ U_{K_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{K_1} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{K_2} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{K_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{K_1} \\ I_{K_2} \\ I_{K_3} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Naponi i struje u izrazu 4.9 nazivaju se komponentnim električnim veličinama. Transformacijom izraza 4.1 u 4.9 sistem od tri jednačine sa tri nepoznate trofaznog elementa se raspada na tri nezavisne jednačine za pojedine komponentne sistema. To se može grafički prikazati kao na slici 4.1.

Oznake na slici 4.1 imaju sledeće značenje:



Slika 4.1: Transformacije iz faznih u komponentne veličine i inverzna transformacija

K1, K2, K3 - ekvivalentni nezavisni komponentni sistemi

Inverzna transformacija iz komponentnih u fazne veličine vrši se sledećim matičnim operacijama:

$$[U_F] = [P]^{-1} \cdot [U_K] \quad (4.10)$$

$$[I_F] = [Q] \cdot [I_K] \quad (4.11)$$

Ukoliko se vektori napona i struja odnose na stacionaran režim i sadrže kompleksne brojeve, tada elementi matrica transformacija mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Ukoliko su elementi vektora napona i struja trenutne vrednosti, tada elementi matrica transformacija treba da budu realni brojevi.

4.2 Najčešće korišćene transformacije

4.2.1 Simetrične komponente

U slučaju ustaljenog režima najčešća je trofazna transformacija u simetrične komponente, (transformacija Edith Clark). Matrica transformacije u ovom slučaju ima oblik:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$[P] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

U 4.12 i 4.13 $\underline{a}$ označava kompleksni operator:

$$\underline{a} = e^{j \cdot 2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.14)$$

$$\underline{a}^2 = e^{j \cdot 4\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.15)$$

Kod transformacije u simetrične komponente važi sledeći odnos između matrica transformacija za napone i struje:

$$[P] = [Q]^{-1} \quad (4.16)$$

Ako se primeni transformacija u simetrične komponente trofaznog elementa predstavljenog matricom impedansi koja je simetrična i ciklična, dobija se dijagonalna matrica komponentnih impedansi. U tom slučaju Omov zakon u matičkom obliku za transformisani sistem u simetrične komponente ima sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \\ \underline{U}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_F - \underline{Z}_M & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_F - \underline{Z}_M & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_F + 2 \cdot \underline{Z}_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \\ \underline{I}_o \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

gde veličine označene indeksom d označavaju direktni komponentni sistem, i inverzni komponentni sistem i o označavaju nulti sistem.

Direktne i inverzne i nulte električne veličine dobijaju se iz faznih sledećom operacijom:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \\ \underline{U}_o \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Mogu se uvesti sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_d &= \underline{Z}_F - \underline{Z}_M & - \text{direktna, koja je jednaka inverznoj impedansi trofaznog elementa,} \\ \underline{Z}_o &= \underline{Z}_F + 2 \cdot \underline{Z}_M & - \text{nulta impedansa trofaznog elementa.} \end{aligned}$$

Obrnuto, fazne veličine se dobijaju iz komponentnih inverznom transformacijom:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \\ \underline{U}_o \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Ukoliko se raspolaze direktnom, odnosno nultom impedansom nekog trofaznog sime-

tričnog elementa, onda se mogu dobiti fazne i međufazne vrednosti sledećim relacijama:

$$\underline{Z_F} = \frac{2\underline{Z_d} + \underline{Z_o}}{3} \quad (4.20)$$

$$\underline{Z_M} = \frac{\underline{Z_0} - \underline{Z_d}}{3} \quad (4.21)$$

4.2.2 Transformacija u α , β i o komponente

Transformacija u α , β i o komponente je pogodna za rešavanje prelaznih režima, kada se elementi mreže mogu opisati simetričnim i cikličnim matricama. U slučaju vodova, to su idealno transponovani vodovi. Može se koristiti za rešavanje i prelaznih režima za transformaciju trenutnih vrednosti napona i struja, kao i za rešavanje ustaljenih režima. Elementi matrice su realni brojevi.

Matrice transformacije imaju sledeći oblik:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Ispunjen je uslov da je:

$$[P] = [Q]^{-1} \quad (4.24)$$

Transformacija faznih napona u vremenskom domenu u komponentne data je matičnim izrazom:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A(t) \\ u_B(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Obrnuto, transformacija komponentnih u fazne veličine data je izrazom:

$$\begin{bmatrix} u_A(t) \\ u_B(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Fazne i komponentne vrednosti napona se mogu predstavljati trenutnim vrednostima, jer se α , β i o transformacija mogu primenjivati i u vremenskom domenu, za razliku od simetričnih komponenti koje su transformacija sa kompleksnim matricama i mogu se primenjivati samo u kompleksnom domenu.

Omov zakon u matričnom obliku posle transformacije u α , β i 0 komponente ima opšti oblik koji važi za vremenski ili kompleksan domen:

$$\begin{bmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_F - Z_M & 0 & 0 \\ 0 & Z_F - Z_M & 0 \\ 0 & 0 & Z_F + 2 \cdot Z_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \\ I_o \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Veličine U_α , U_β , U_o , kao i I_α , I_β , I_o mogu biti trenutne vrednosti ili kompleksne vrednosti električnih veličina. Za induktivan elemenat se komponente induktivnosti definišu na sledeći način:

$L_\alpha = L_F - L_M$ - α , koja je jednaka β komponenti induktiviteta trofaznog elementa,

$L_0 = L + 2L_M$ - nulta induktivnost trofaznog elementa,

L_F - sopstvena induktivnost faze,

L_M - međusobna induktivnost dve faze.

Izraz 4.27 izražen za induktivan elemenat u vremenskom domenu ima oblik:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 \\ 0 & 0 & L_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_\alpha}{dt} \\ \frac{di_\beta}{dt} \\ \frac{di_o}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Transformacija elektromotornih sila idealnog naponskog generatora u $\alpha, \beta, 0$ transformaciju u kompleksnom domenu vrši se sledećom matričnom transformacijom:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_\alpha \\ \underline{E}_\beta \\ \underline{E}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E} \\ \underline{E} \cdot \underline{a} \\ \underline{E} \cdot \underline{a}^2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \underline{a}^2 &= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Posle zamene 4.30 u 4.29 dobija se:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_\alpha \\ \underline{E}_\beta \\ \underline{E}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ Ee^{j\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

4.3 Modalna transformacija

Modalna transformacija predstavlja transformaciju koja se može primenjivati i za nesimetričan raspored provodnika, odnosno u slučajevima kada se vodovi ne tretiraju kao idealno transponovani. Najčešće se vodovi tretiraju kao idealno transponovani jer se ne poznaju dovoljno dobro svi parametri koji utiču na prostiranje, a posebno na prigušenje pri prostiranju. Mora se naglasiti da se kod dugačkih vodova struktura i sastav tla na trasi voda menja, što je praktično veoma teško da se modeluje. Ipak, kod vodova najviših naponskih nivoa određene pojave vezane za nesimetričnost geometrije faznih provodnika mogu da budu od značaja kod analize sklopnih prenapona. Zbog toga će na ovom mestu biti opisana transformacija u **prirodne modove**, to jest matrica transformacije je prilagođena prirodnim karakteristikama voda.

4.3.1 Jednačine telegrafičara za trofazni vod

Na slici 4.2 prikazana je šema elementarne deonice trofaznog voda dužine Δx . Prikazani vod je nesimetričan sa različitim podužnim parametrima po pojedinim fazama radi generalizacije. Posmatrani vod je bez zaštitnih užadi. Tlo na kome je vod podignut je homogeno, specifičnog otpora ρ . Svi parametri voda su podužni, izraženi po metru.

Oznake na slici 4.2 imaju sledeće značenje:

r_1, r_2, r_3 - podužna otpornost faznih provodnika A, B i C (Ω/m),

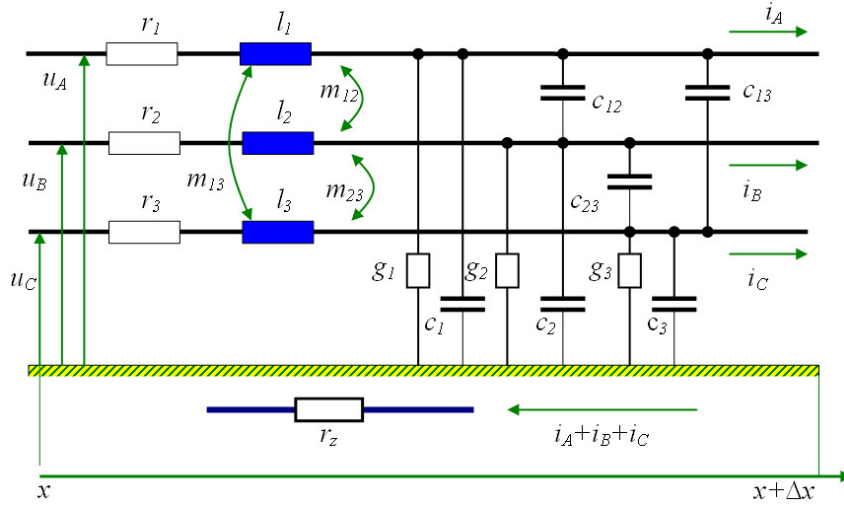
l_1, l_2, l_3 - podužna induktivnost faznih provodnika A, B i C (H/m),

m_{12}, m_{23}, m_{13} - međusobna induktivnost po jedinici dužine dva fazna provodnika (H/m),

c_1, c_2, c_3 - podužna kapacitivnost faznih provodnika A, B i C prema zemlji (F/m),

c_{12}, c_{23}, c_{13} - međusobna kapacitivnost dva fazna provodnika (F/m),

r_Z - podužne otpornost povratnog puta kroz zemlju (Ω/m).



Slika 4.2: Elementarna deonica trofaznog netransponovanog voda

Parcijalne diferencijalne jednačine za redni pad napona na dužini dx za sistem na slici 4.2 u matricnom obliku dat je izrazom:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial u_A(x,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial u_B(x,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial u_C(x,t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & l_2 & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial i_A(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i_B(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i_C(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 + r_z & r_z & r_z \\ r_z & r_2 + r_z & r_z \\ r_z & r_z & r_3 + r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A(x,t) \\ i_B(x,t) \\ i_C(x,t) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Parcijalne diferencijalne jednačine za otočno odvođenje struje na dužini dx za sistem na slici 4.2 u matricnom obliku dat je izrazom:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial i_A(x,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial i_B(x,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial i_C(x,t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{F1} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{12} & c_{F2} & -c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & c_{F3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_A(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial u_B(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial u_C(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A(x,t) \\ u_B(x,t) \\ u_C(x,t) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$\begin{aligned} c_{F1} &= c_1 + c_{12} + c_{13} \\ c_{F2} &= c_2 + c_{12} + c_{23} \\ c_{F3} &= c_3 + c_{13} + c_{23} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Posle prelaska na domen Laplasove transformacije, dobijaju se u skraćenom matričnom obliku sledeći izrazi:

$$-\frac{\partial[U(x)]}{\partial x} = [Lp + R] \cdot [I(x)] \quad (4.35)$$

$$-\frac{\partial[I(x)]}{\partial x} = [Cp + G] \cdot [U(x)] \quad (4.36)$$

gde oznake imaju sledeće značenje:

- p - Laplasov operator,
- $[U(x)]$ - vektor od tri fazna napona u Laplasovom domenu,
- $[I(x)]$ - vektor od tri fazne struje u Laplasovom domenu,
- $[Lp + R]$ - kvadratna matrica 3×3 podužnih induktiviteta i otpornosti na osnovu izraza 4.32 u Laplasovom domenu,
- $[Cp + G]$ - kvadratna matrica 3×3 podužnih kapaciteta i odvodnosti na osnovu izraza 4.33 u Laplasovom domenu.

Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} [Z] &= [R + pL] \\ [Y] &= [G + pC] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Diferenciranjem izraza 4.35 i zamenom izraza 4.36, korišćenjem predhodnih skraćenica 4.37, dobija se parcijalna diferencijalna jednačina za fazne napone u matričnom obliku.

$$-\frac{\partial^2[U(x)]}{\partial x^2} = [Z] \cdot [Y] \cdot [U(x)] \quad (4.38)$$

Diferenciranjem izraza 4.36 i zamenom izraza 4.35, dobija se parcijalna diferencijalna jednačina za fazne struje u matričnom obliku.

$$-\frac{\partial^2[I(x)]}{\partial x^2} = [Y] \cdot [Z] \cdot [I(x)] \quad (4.39)$$

Važi sledeća relacija:

$$[Y] \cdot [Z] = ([Z] \cdot [Y])^T \quad (4.40)$$

Uvedimo oznaku matrice koeficijenata prostiranja $[\gamma]$ za fazne napone:

$$[\gamma] = \sqrt{[Z] \cdot [Y]} \quad (4.41)$$

Da bi se mogle rešiti jednačine telegrafičara u matričnom obliku 4.38, neophodno je matricu $[\gamma]$ primenom linearnih transformacija (množenjem odgovarajućim matricama sa leve i desne strane) dijagonalizovati [61], [62], [63].

4.3.2 Sopstvene vrednosti matrica i sopstveni vektori

Posmatrajmo kvadratnu nesingularnu matricu $[A]$ reda n . Ako je $[I]$ jedinična matrica reda n , tada se karakteristični polinom kvadratne matrice $[A]$ definiše na sledeći način:

$$P(\lambda) = \det([A] - \lambda[I]) \quad (4.42)$$

gde je $[I]$ odgovarajuća jedinična matrica.

U slučaju simetrične i ciklične matrice $[Z]$ karakteristični polinom se dobija rešavanjem sledeće determinante:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} Z - \lambda & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z - \lambda & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.43)$$

Kada se napiše jednačina $P(\lambda) = 0$, to nazivamo karakterističnom jednačinom.

Karakteristična jednačina na osnovu karakterističnog polinoma 4.43 za matricu impedansi u operatorskom domenu, kada je matrica simetrična i ciklična, ima sledeći oblik:

$$P(\lambda) = (Z - \lambda)^3 + 2Z_m^3 - 3Z_m^2(Z - \lambda) \quad (4.44)$$

Svaki koren karakterističnog polinoma λ_i nazivamo sopstvenom ili karakterističnom vrednošću matrice $[A]$. Svaku kolonu matricu (vektor) $[v]$, gde je $[v] \neq 0$ koja zadovoljava uslov da je:

$$[A][v] = \lambda[v] \quad (4.45)$$

nazivamo sopstvenim ili karakterističnim vektorom, a λ_i je jedna sopstvena vrednost matrice $[A]$.

Za proizvoljnu matricu $[A]$, tipa $n \times n$, karakteristični polinom je uvek polinom n -tog stepena:

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (4.46)$$

Problem određivanja sopstvenih vektora matrice $[A]$ svodi se na rešavanje sistema homogenih linearnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} ([A] - \lambda_1[I]) \cdot [v_1] &= [0] \\ ([A] - \lambda_2[I]) \cdot [v_2] &= [0] \\ &\dots = \dots \\ ([A] - \lambda_n[I]) \cdot [v_n] &= [0] \end{aligned} \quad (4.47)$$

gde su $[v_1]$, $[v_2]$... $[v_n]$ sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_1 , λ_2 ... λ_n .

Sva rešenja za članove svakog od sopstvenih vektora kolona $[v_1]$ do $[v_n]$ dolaze u obzir osim trivijalnog rešenja kada su svi članovi jednog vektora kolone jednaki nuli. Homogeni sistem jednačina ima netrivialna rešenja ukoliko je $\det[A - \lambda_i I] = 0$. Ukoliko postoje netrivialna rešenja, u tom slučaju se neka rešenja mogu pretpostaviti, a druga rešenja se dobijaju kao linearna kombinacija predhodnih.

Ukoliko su određeni sopstveni vektori $[v_1]$ do $[v_n]$, tada se formira kvadratna matrica transformacije $[T]$ na sledeći način:

$$[T] = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n] \quad (4.48)$$

Ako se preuredi izraz 4.47, može se napisati za više karakterističnih vektora na sledeći način:

$$[A] \cdot [T] = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) \cdot [T] \quad (4.49)$$

gde je $\text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$ dijagonalna matrica reda $n \times n$ čiji su članovi sopstve vrednosti matrice $[A]$.

Ukoliko je matrica $[T]$ nesingularna, tada se množenjem sa leve strane inverznom matricom $[T]^{-1}$ dobija:

$$[T]^{-1} \cdot [A] \cdot [T] = [T]^{-1} \cdot \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) \cdot [T] \quad (4.50)$$

odnosno:

$$[T]^{-1} \cdot [A] \cdot [T] = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \quad (4.51)$$

Na osnovu izraza 4.51 postignuto je da matricom transformacije $[T]$ postignemo dijagonalizaciju nesusingularne matrice $[A]$.

4.3.3 Primena modalne transformacije na simetričnu i cikličnu matricu

Posmatrajmo matricu koeficijenata prostiranja za idealno transponovan vod datu izrazom

$$[\gamma]^2 = [Z][Y] = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & \gamma \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Modalna transformacija se radi u nekoliko koraka.

Korak 1: formiranje i rešavanje karakteristične jednačine

Karakteristični polinom kvadratne matrice $[\gamma]$ se definiše na sledeći način:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \gamma - \lambda & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma - \lambda & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & \gamma - \lambda \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Posle izračunavanja determinante i izjednačavanja karakterističnog polinoma sa nulom $P(\lambda) = 0$ dobija se karakteristična jednačina u sledećem obliku:

$$-\lambda^3 + 3\gamma\lambda^2 + 3(\gamma_m^2 - \gamma^2)\lambda + (\gamma^3 + 3\gamma_m^3 - 3\gamma\gamma_m^2) = 0 \quad (4.54)$$

Rešavanjem karakteristične jednačine dobijaju se sledeće karakteristične vrednosti matrica, od kojih prve dve predstavljaju dvostruku nulu karakteristične jednačine:

1. karakteristična vrednost $\lambda_1 = \gamma - \gamma_m$
2. karakteristična vrednost $\lambda_2 = \gamma - \gamma_m$
3. karakteristična vrednost $\lambda_3 = \gamma + 2\gamma_m$

Korak 2: određivanje karakterističnih vektora

Određivanje karakterističnih vektora svodi se na rešavanje sistema linearnih homogenih jednačina za pojedine karakteristične vrednosti matrice γ . Prvo se određuje karakteristični vektor-kolona koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ_1 .

$$\begin{bmatrix} \gamma - \lambda_1 & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma - \lambda_1 & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & \gamma - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{a1} \\ v_{b1} \\ v_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

zamenom vrednosti za $\lambda_1 = \gamma - \gamma_m$ se dobija:

$$\begin{bmatrix} \gamma_m & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & \gamma_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{a1} \\ v_{b1} \\ v_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Pošto je sistem singularan, moraju se 2 rešenja pretpostaviti u vektoru v_1 , a treće se dobija kao linearna kombinacija predhodna dva. Pretpostavimo da su dva rešenja $v_{a1} = 1$ i $v_{b1} = -1/2$. Treće rešenje se dobija iz bilo koje vrste:

$$v_{c1} = -\frac{\gamma_m v_{a1} + \gamma_m v_{b1}}{\gamma_m} = -1 + 1/2 = -1/2 \quad (4.57)$$

Na isti način se može odrediti drugi sopstveni vektor v_2 za istu karakterističnu vrednost $\lambda_2 = \lambda_1$. Pretpostavimo da su dva rešenja $v_{a2} = 0$ i $v_{b2} = \sqrt{3}/2$. Treće rešenje se dobija iz bilo koje vrste:

$$v_{c2} = -\sqrt{3}/2 \quad (4.58)$$

Treći karakteristični vektor-kolona koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ_3 se dobija na osnovu izraza.

$$\begin{bmatrix} \gamma - \lambda_3 & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma - \lambda_3 & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & \gamma - \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{a3} \\ v_{b3} \\ v_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Zamenom vrednosti za $\lambda_3 = \gamma + 2\gamma_m$ se dobija:

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot \gamma_m & \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & -2 \cdot \gamma_m & \gamma_m \\ \gamma_m & \gamma_m & -2 \cdot \gamma_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{a3} \\ v_{b3} \\ v_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Ukoliko se odabere vrednost za $v_{a3} = 1$ i $v_{b3} = 1$, dobija se na osnovu prve vrste matrice rešenje:

$$v_{c3} = -\frac{-2\gamma_m v_{a3} + \gamma_m + v_{b3}}{\gamma_m} = 2 - 1 = 1 \quad (4.61)$$

Konačan oblik matrice transformacije ima oblik:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Matrica 4.62 identična je matrici transformacije u α , β i 0 transformaciju Q prema 4.23. Ovim smo pokazali da opšti pristup omogućava transformaciju simetrične i ciklične matrice u α , β i 0 komponente.

Može se uočiti da postoji bezbroj mogućih matrica transformacije trofaznih simetričnih i cikličnih matrica elemenata elektroenergetskog sistema, koje zavise od izbora rešenja vektora-kolona homogenih linearnih jednačina.

4.3.4 Primena modalne transformacije na horizontalni vod sa simetričnim rasporedom provodnika

Opšti oblik prizvoda matrica $[Z]$ i $[Y]$ horizontalnog voda sa simetričnim provodnicima ima oblik:

$$[ZY] = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & D \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Određivanjem nula karakterističnog polinoma dobijene su sledeće karakteristične vrednosti matrice $[ZY]$:

1. $\lambda_1 = A + C + B \cdot M$
2. $\lambda_2 = A - C$
3. $\lambda_2 = A + C + B \cdot N$

Na osnovu gornjih rešenja karakteristične vrednosti matrice $[ZY]$ određeni su karakteristični vektori-kolone $[v_1]$, $[v_2]$ i $[v_3]$.

$$[v_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{bmatrix}, [v_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, [v_3] = \begin{bmatrix} 1 \\ N \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

gde su:

$$M = \frac{E - A - C + \sqrt{(A + C - E)^2 + 8BD}}{2B} \quad (4.65)$$

$$N = \frac{E - A - C - \sqrt{(A + C - E)^2 + 8BD}}{2B} \quad (4.66)$$

Ovi izrazi se mogu proširiti na bilo koji raspored provodnika, ali bi se morala za taj slučaj rešavati druga karakteristična jednačina i formirati odgovarajuća matrica transformacije. Matrica transformacije u ovom slučaju ima oblik:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ M & 0 & N \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Inverzna matrica transformacije ima sledeći oblik:

$$[T]^{-1} = \frac{1}{2(N - M)} \begin{bmatrix} N & -2 & N \\ N - M & 0 & -(N - M) \\ -M & 2 & -M \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Primenom modalne transformacije matična diferencijalna jednačina telegrafičara 4.38 raspada se na 3 nezavisne jednačine telegrafičara u obliku:

$$-\frac{\partial^2 [U_k(x)]}{\partial x^2} = [\gamma_k]^2 \cdot [U_k(x)] \quad (4.69)$$

gde je $k = 1, 2, 3$ redni broj prirodnog moda, a $\gamma_k = \sqrt{\lambda_k}$.

Matrica $[\gamma_k]$ dobija se na sledeći način:

$$[\gamma_k] = [T]^{-1}[Z][Y][T] \quad (4.70)$$

Odnosno, kada se napiše u razvijenom obliku, izračunava se sledećim operacijama:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(Q - P)} \begin{bmatrix} N & -2 & N \\ N - M & 0 & -(N - M) \\ -M & 2 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & D \\ C & B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ M & 0 & N \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Na ovaj način se može u višefazom sistemu vodova modelovati prostiranje talasa bez međusobnog delovanja između komponentnih sistema.

Za praktičnu primenu pri proračunu sklopnih prenapona dovoljno je koristiti uprošćenje da je vod idealno transponovan. Samo izuzetno se pojavljuje potreba za tačnijim proračunima.

Ne sme se zaboraviti da se matrica impedansi razlikuje po svojoj strukturi od matrice prostiranja. U posebnom slučaju horizontalnog simetričnog voda matrica impedansi ima oblik:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{12} \\ Z_{13} & Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Za simetričnu matricu impedansi $[Z]$ potrebno je napraviti karakterističan polinom izračunavanjem determinante:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} Z_{11} - \lambda & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} - \lambda & Z_{12} \\ Z_{13} & Z_{12} & Z_{11} - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.73)$$

odnosno:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C \quad (4.74)$$

gde su:

$$A = -2Z_{11} \quad (4.75)$$

$$B = Z_{11}^2 + Z_{13}^2 + 2Z_{12}^2 \quad (4.76)$$

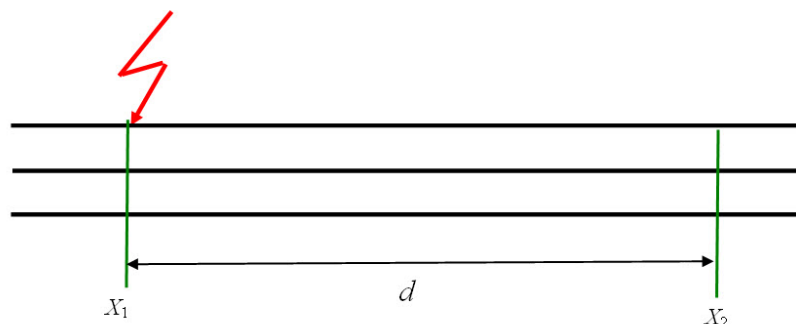
$$C = Z_{22}Z_{11}^2 + 2Z_{13}Z_{12}^2 \quad (4.77)$$

Zbog složenosti postupka ovaj polinom nećemo rešavati analitički, već se mogu za svaki konkretan slučaj odrediti nule polinoma λ_1, λ_2 i λ_3 .

4.3.5 Primer dvobrzinskog prostiranja talasa

Na slici 4.3 prikazan je deo trofaznog dalekovoda na kome se proučavaju efekti dvobrzinskog prostiranja talasa usled atmosferskog pražnjenja. Do pražnjenja je došlo u fazu A u tački X_1 , a talasi se posmatraju u tački X_2 . Dalekovod je dovoljno dugačak da se mogu zanemariti efekti višestrukih refleksija. Potrebno je odrediti koliki će se pojaviti napon u tački X_2 , koja je na rastojanju d od tačke u kojoj je došlo do pražnjenja, smatrajući vod idealnim i idealno transponovanim. Usvojeni su sledeći parametri sistema:

- Karakteristična impedansa kanala groma $Z_G = 200 \, \Omega$,
- Karakteristična impedansa voda u α komponentnom sistemu $Z_\alpha = 400 \, \Omega$,
- Karakteristična impedansa voda u nultom komponentnom sistemu $Z_o = 600 \, \Omega$,



Slika 4.3: Deo trofaznog dalekovoda na kome se proučavaju efekti dvobrzinskog prostiranja talasa usled atmosferskog pražnjenja

- Dužina voda na kojoj se posmatraju efekti prostiranja $d=3$ km.
- Brzina prostiranja talasa u α i β komponentnom sistemu je jednaka brzini svetlosti $v = 300\,000$ km/s.
- Brzina prostiranja u nultom komponentnom sistemu je $v_o = 250\,000$ km/s.

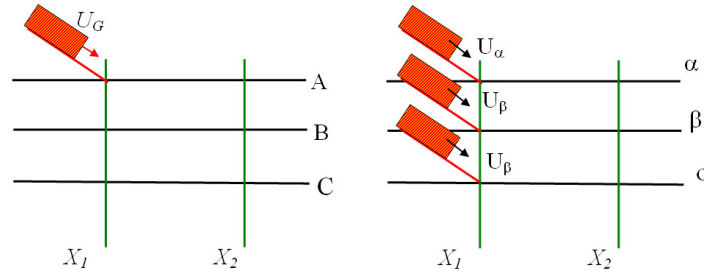
Pri proračunu su uvedene sledeće pretpostavke:

- Kanal groma se može zameniti vodom karakteristične impedanse Z_G , po kome se prostire naponski talas atmosferskog pražnjenja. Karakteristična impedansa kanala groma se smatra konstantnom iako se ona realno menja u toku procesa pražnjenja zbog promene dimenzija jonizovanog prostora koji čini kanal groma.
- Povratni put kroz zemlju se posmatra kao frekvenciski nezavistan. Usvojena karakteristična impedansa nultog komponentnog sistema veća je od karakterističnih impedansi u α i β komponentnim sistemima, ali se smatra konstantnom. U realnom sistemu bi se karakteristična impedansa menjala u zavisnosti od frekvencije procesa koji se posmatra i to tako da bi pri vrlo visokim frekvencijama bila identična kao i karakteristična impedansa u druga dva komponentna sistema. Pri nižim frekvencijama, kada dolazi do pomeranja povratnog puta na veću dubinu kroz zemlju, karakteristična impedansa nultog komponentnog sistema se povećava.
- Brzina prostiranja u nultom komponentnom sistemu takođe je usvojena nešto niža nego u ostala dva komponentna sistema, ali se smatra nezavisnom od frekvencije procesa koji se posmatra. U realnom sistemu brzina prostiranja se smanjuje pri nižim frekvencijama odvijanja procesa.

Sistem se posmatra kao da se proces odvija sa konstantnom učestanošću, iako se talas pražnjenja atmosferskog porekla odlikuje relativno širokim spektrom učestanosti zbog različite strmine talasa na čelu i začelju.

Radi jednostavnijeg proračuna naponski talas usled atmosferskog pražnjenja koji se prostire po kanalu groma zamenjuje se talasom pravougaonog čela i beskonačnog trajanja, amplitude $U_G = 600$ kV.

Na slici 4.4 prikazana je zamenska šema sistema u faznim koordinatama (levo) i u α , β i 0 komponentnim sistemima (desno). Na mestu atmosferskog pražnjenja, u tački X_1 , na fazi A priključen je vod kojim se zamenjuje kanal groma. Kako jedino na fazi A dolazi do atmosferskog pražnjenja, po kanalu groma na fazi A prostire se prenaponski talas.



Slika 4.4: Na slici levo prikazan je sistem u faznim koordinatama sa atmosferskim udarom u fazu A, a na slici desno sistem sa atmosferskim udarom transformisan u α , β i nulte koordinate

Napon talasa atmosferskog pražnjenja dobija se sledećom transformacijom u komponentne sisteme.

$$\begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Nakon transformacije se dobija:

$$u_\alpha = \frac{2}{3}U_G \quad (4.79)$$

$$u_\beta = 0 \quad (4.80)$$

$$u_o = \frac{1}{3}U_G \quad (4.81)$$

Na mestu udara groma dolazi do prelamanja talasa usled prelaska sa kanala groma na fazni provodnik. Koeficijenti prelamanja u α i nultom komponentnom sistemu su:

$$\alpha_\alpha = \frac{2Z_\alpha/2}{Z_G + Z_\alpha/2} \quad (4.82)$$

$$\alpha_0 = \frac{2Z_0/2}{Z_G + Z_0/2} \quad (4.83)$$

kada se izračuna, dobija se:

$$\alpha_\alpha = 1 \quad (4.84)$$

$$\alpha_o = 1.2 \quad (4.85)$$

Posle prelamanja po vazдушnom vodu putuje talas u α i 0 komponentnim sistemima:

$$u_{\alpha 1} = \frac{2}{3} \cdot U_G \cdot h(t) \quad (4.86)$$

$$u_{01} = 0.4 \cdot U_G \cdot h(t) \quad (4.87)$$

gde je $h(t)$ Hevisajdova odskočna funkcija.

Kada se zameni vrednost za amplitudu talasa napona atmosferskog pražnjenja, dobija se:

$$u_{\alpha 1} = 400 \cdot h(t) \quad (4.88)$$

$$u_{01} = 240 \cdot h(t) \quad (4.89)$$

Vreme prostiranja duž deonice d u α komponentnom sistemu je:

$$T_\alpha = \frac{d}{v} \quad (4.90)$$

Kada se izračuna, dobija se: $T_\alpha = 10 \mu s$.

Vreme prostiranja duž deonice d u nultom komponentnom sistemu je:

$$T_o = \frac{d}{v_o} \quad (4.91)$$

Kada se izračuna, dobija se: $T_o = 12 \mu s$.

Napon u tačku X_2 stiže sa vremenskim zakašnjenjem usled prostiranja. U α komponentnom sistemu napon u tački X_2 , je:

$$U_{\alpha 2}(t) = \frac{2}{3} U_G \cdot h(t - T_\alpha) \quad (4.92)$$

ili, kad se zamene vrednosti:

$$U_{\alpha 2}(t) = 400 \cdot h(t - 10) \text{ (kV)} \quad t(\mu s) \quad (4.93)$$

U nultom komponentnom sistemu napon u tački X_2 , je:

$$U_{02}(t) = 0.4 \cdot U_G \cdot h(t - T_0) \quad (4.94)$$

ili, kad se zamene vrednosti:

$$U_{02}(t) = 240 \cdot h(t - 12) \text{ (kV)} \quad t(\mu s) \quad (4.95)$$

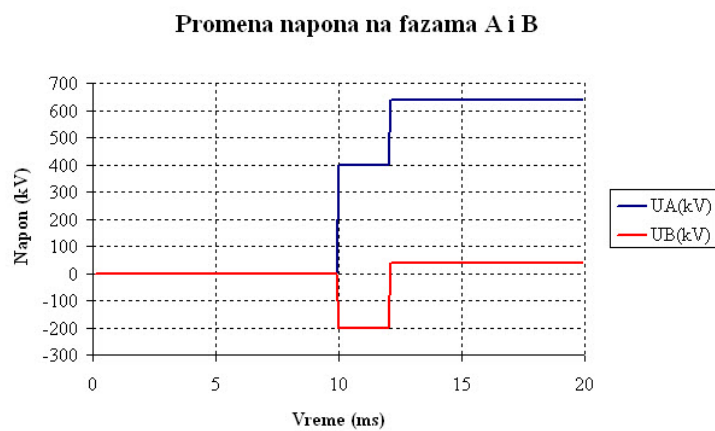
Pošto se vod smatra idealnim, pri prostiranju duž deonice dužine d uopšte ne dolazi do prigušenja i izobličenja talasa. Napon u faznim koordinatama dobija se inverznom transformacijom na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} u_A(t) \\ u_B(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\beta(t) \\ u_o(t) \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Pošto je napon usled atmosferskog pražnjenja u β komponentnom sistemu nula, nakon prostiranja napon β komponentnom sistemu ostaje jednak nuli. Kada se izračunaju brojčane vrednosti za napone na pojedinim fazama u tački X_2 , dobijaju se izrazi 4.97, gde je vreme t izraženo u μs :

$$\begin{aligned} U_{A2}(t) &= 400 \cdot h(t - 10) + 240 \cdot h(t - 12) \text{ (kV)} \\ U_{B2}(t) &= -200 \cdot h(t - 10) + 240 \cdot h(t - 12) \text{ (kV)} \\ U_{C2}(t) &= -200 \cdot h(t - 10) + 240 \cdot h(t - 12) \text{ (kV)} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Kada se skicira vremenski tok napona na pojedinim fazama, dobijaju se dijagrami za faze A i B na slici 4.5. Napon na fazi C identičan je naponu na fazi B. Može se uočiti da se na fazi B, odnosno C, koje nisu pogođene udarom, pojavljuje talas suprotnog polariteta.



Slika 4.5: Skica napona na fazama A i B pri idealizovanom dvobrzinskom prostiranju po trofaznom vodu