

Poglavlje 2

Mreže sa koncentrisanim parametrima

2.1 Definicije elemenata sa koncentrisanim parametrima

Osnovni elementi električnih kola koji se predstavljaju koncentrisanim parametrima mogu se podeliti na dve grupe:

- Aktivni elementi
- Pasivni elementi

Aktivni elementi električnih kola su izvori, koji se mogu podeliti na dva tipa:

- Naponski izvori
- Strujni izvori

U električnim šemama se izvori mogu definišati na dva načina:

- idealni izvori, a unutrašnje impedanse izvora se dodaju kao eksterni pasivni elementi.
- realni izvori, koji u sebi sadrže impedansu grane.

2.1.1 Pasivni elementi

Pasivni elementi koji će biti razmatrani pri obrazovanju jednačina stanja električnog kola su:

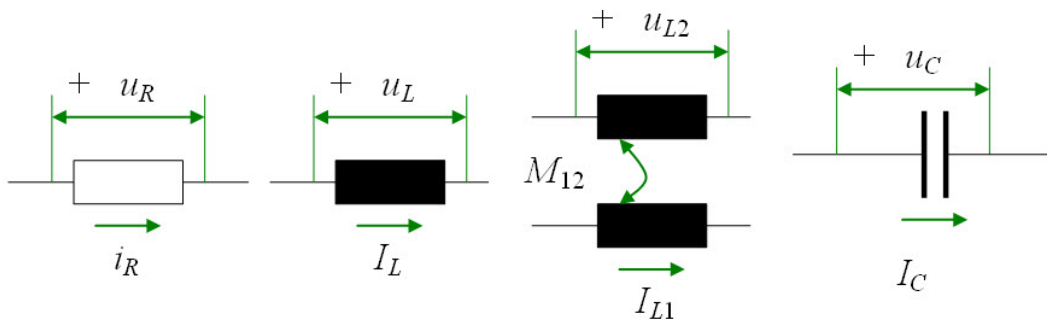
- Rezistivni elementi (otpornici), čija je osnovna karakteristika otpornost R ili recipročna vrednost G ,
- Induktivni elemenat (kalem), čija je osnovna karakteristika induktivnost L ,
- Spregnuti induktivni elementi (kalemovi), čija je osnovna karakteristika induktivnost sprege L_{12} ,
- Kapacitivni elementi (kondenzatori), čija je osnovna karakteristika kapacitivnost C .

Induktiviteti mogu da budu sopstveni induktiviteti grane ili međusobni induktiviteti dve grane.

Osnovne veze između trenutnih električnih veličina na različitim elementima kola date su sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 u_R(t) &= R \cdot i(t) \\
 i_R(t) &= G \cdot u(t) \\
 u_{L1}(t) &= L_1 \cdot \frac{di(t)}{dt} \\
 u_{L2}(t) &= M_{12} \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} \\
 i_C(t) &= C \cdot \frac{du(t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Orijentacije napona i struja na pojedinim elementima prikazane su na slici 2.1.

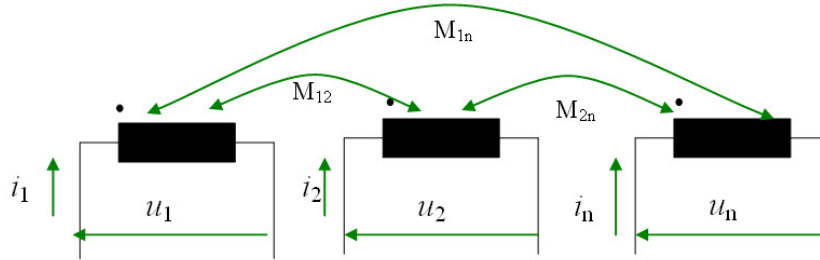


Slika 2.1: Naponi i struje na pojedinim elementima

Uoliko imamo n magnetno spregnutih kalemova, koji nisu u galvanskoj vezi, tada se trenutni naponi na krajevima kalemova i struje kroz kalemове prikazati sledećim matričnim izrazom.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & \pm M_{12} & \pm M_{13} & \dots & \pm M_{1n} \\ \pm M_{12} & L_{12} & \pm M_{23} & \dots & \pm M_{2n} \\ & & & \dots & \\ \pm M_{n1} & \pm M_{n2} & \pm M_{3n} & \dots & L_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{di_n}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Na slici 2.2 prikazana je magnetska sprega n kalemova. Crna tačka pored simbola za kalem označava orijentaciju motanja, od koje zavisi predznak za vrednosti međusobnog induktiviteta u izrazu 2.2. Ako se smerovi struja isti za dva kola i smerovi namotavanja se poklapaju, tada se nalazi znak $+$ uz vrednost međusobnog induktiviteta.



Slika 2.2: Definicija magnetno spregnutih kalemova sa oznakama smerova

Da li će otpornik biti predstavljen kao R ili G elemenat zavisi isključivo od prirode susednih elemenata. Kada je moguće, treba se držati sledećih pravila:

- Otpornik vezan na red sa induktivnim kalemom se deklariše kao R elemenat,
- Otpornik vezan paralelno sa kondenzatorom se deklariše kao G elemenat,

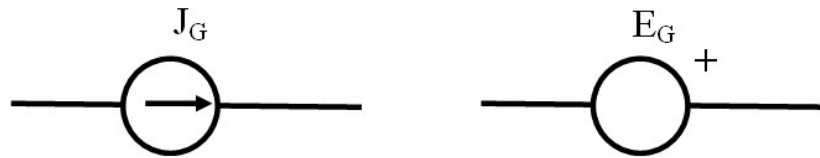
U ostalim slučajevima se vrši transformacija ekvivalentne šeme prema sledećim pravilima:

- Otpornik na red sa drugim otpornikom se ekvivalentira jednim ekvivalentnim otpornikom,
- Otpornik vezan paralelno sa induktivnim kalemom se transformiše u ekvivalentnu rednu vezu,
- Otpornik vezan na red sa kondenzatorom se transformiše u ekvivalentnu paralelnu vezu.

Po pravilu su ovakvi slučajevi u elektroenergetskim mrežama retki.

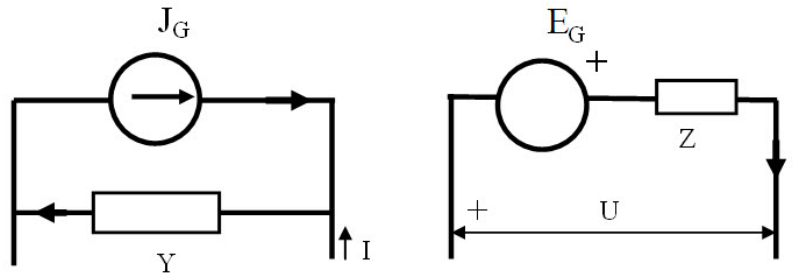
2.1.2 Aktivni elementi

Aktivni elementi su naponski i strujni izvori. Na slici 2.3 levo prikazan je idealan strujni izvor (amplituda i vremenski tok struje su nezavisni od električnog kola u koje je izvor uključen). Na slici 2.3 desno prikazan je naponski izvor kod koga amplituda i vremenski tok napona ne zavise od struje koju izvor daje.



Slika 2.3: Idealni strujni izvor (levo) i idealni naponski izvor (desno)

Realni električni izvori prikazani su na slici 2.4:



Slika 2.4: Realni strujni (levo) i naponski izvor (desno)

Oznake i jednačine koje opisuju električne veličine date su velikim slovima. Smatraćemo da se radi o operatorskim veličinama (zavisne od Laplasovog operatora $\mathbf{p}$ ili od kružne učestanosti ω).

Izraz koji definiše odnose električnih veličina kod grane sa strujnim izvorom, sa odabranim smerovima grana, ima oblik:

$$I(p) = Y(p) \cdot U(p) - J_G(p) \quad (2.3)$$

Izraz koji definiše odnose električnih veličina kod grane sa naponskim izvorom, sa odabranim smerovima grana, ima oblik:

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p) - E_G(p) \quad (2.4)$$

2.1.3 Nelinearni i nestacionarni elementi

Nelinearni elementi

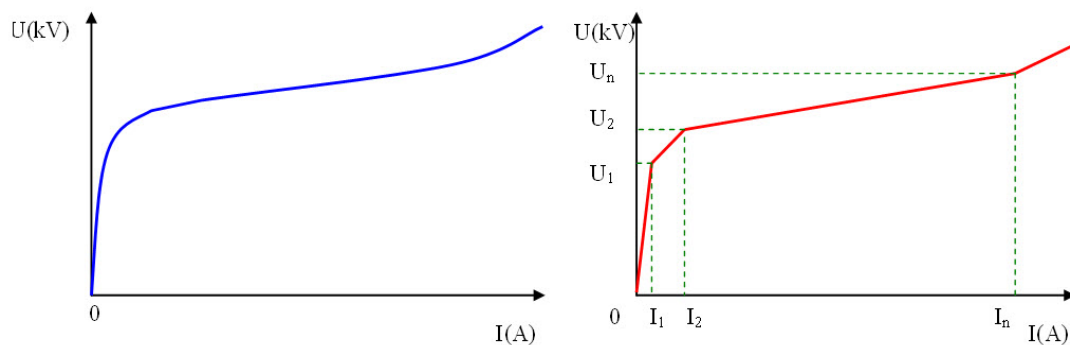
Nelinearni elementi sa koncentrisanim parametrima su elementi čija vrednost nekog parametra zavisi od napona ili struje na elementu. Najčešće primenjivani nelinearni elementi su:

- Odvodnici prenapona sa nelinearnim otpornicima (varistorima),
- Nelinearna karakteristika magnećenja transformatora.

Jedna od podela modelovanja nelinearnih elemenata se može prikazati na sledeća dva načina.

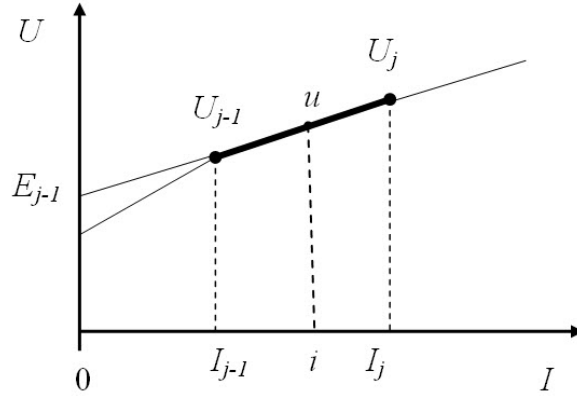
- kontinualno modelovanje nelinearne karakteristike,
- linearno-segmentno modelovanje nelinearne karakteristike.

Na slici 2.5 prikazana je predhodna podela modelovanja za slučaj odvodnika prenapona.

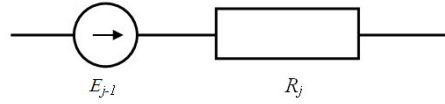


Slika 2.5: Modelovanje nelinearnih elemenata sa skoncentrisanim parametrima za slučaj odvodnika prenapona (levo: kontinualni model nelinearnosti, desno: linearno-segmentni model nelinearnosti)

Prednost kontinualnog modelovanja je veća tačnost modelovanja, a prednost linearno-segmentnog modelovanja je izbegavanje iterativnog rešavanja, veća brzina proračuna i stabilnost numeričkog rešavanja. Na slici 2.6 prikazan je princip određivanja napona kod linearno segmentnog modela.



Slika 2.6: Linearno-segmentno model nelinearnog otpornika

Slika 2.7: Model nelinearne grane na segmentu j karakteristike odvodnika

Za slučaj kada je napon na otporniku između vrednosti U_{j-1} i U_j , grana sa otpornikom se modeluje kao redna veza idealnog naponskog izvora elektromotorne sile E_{j-1} i otpornika, kao na slici 2.7.

Dinamička otpornost grane sa otpornikom za segment j se može izračunati iz sledećeg izraza:

$$R_j = \frac{\partial U}{\partial I} = \frac{U_j - U_{j-1}}{I_j - I_{j-1}} \quad (2.5)$$

Napon na grani za segment j se izračunava iz izraza:

$$u = E_{j-1} + R_j \cdot i \quad (2.6)$$

gde je struja i određena predhodno na segmentu između I_{j-1} i I_j . Na identičan način se može odrediti struja kroz otpornik ako je poznat napon, odnosno:

$$i = I_{j-1} + \frac{u}{R_j} \quad (2.7)$$

Oznake u i i se odnose na trenutne vrednosti napona i struja na grani sa nelinearnim otpornikom za odgovarajući segment.

Nestacionarni elementi

Nestacionarni elementi su oni elementi koji menjaju vrednost u toku vremena. Kao najvažniji nestacionaran element biće opisan prekidač. Pod prekidačem će se podrazumevati svi uređaji koji mogu da uključuju ili prekidaju struju. To mogu biti:

1. mehanički prekidači,
2. sklopke,
3. rastavljači,
4. osigurači.
5. iskrišta i drugo.

Modeli svih prekidača se dele na sledeće dve grupe:

- idealni prekidači,
- realni prekidači.

Pod idealnim prekidačem podrazumeva se elemenat koji u grani mreže menja impedansu od nule do vrlo velike vrednosti. Grana sa idealnim prekidačem može biti sa omskim otpornikom, koji menja vrednost od vrlo male do vrlo velike vrednosti, ili kombinacija induktivnog kalema i omske otpornosti. Pri tome impedansa grane ima samo dve vrednosti koje odgovaraju otvorenim i zatvorenim kontaktima.

Drugi način modelovanja će detaljnije biti prikazan na ovom mestu. Po ovom modelu se grana sa idealnim prekidačem (koja može biti u obliku otpornika, induktivnog kalema ili kombinacije), prekida i ponovo uspostavlja. Svaka promena stanja prekidača menja konfiguraciju kola.

Model realnog prekidača u sebi sadrži nelinearnu i nestacionarnu otpornost luka, koja zavisi od struje i brzine promene struje kroz luk, a obuhvata termodinamičke procese u luku čije je modelovanje veoma složeno. Po svojoj strukturi modeli realnih prekidača se dele na dva tipa:

- modelovanje fizičkih procesa u luku,
- model crne kutije, koji daje matematičke modele koji najbolje simuliraju izmerene rezultate prilikom laboratorijskih ispitivanja prekidača u laboratorijama velike snage.

2.2 Omov zakon u matričnom obliku

U slučaju mreže u kojoj ima veći broj grana sa naponskim izvorima može se napisati Omov zakon u matričnom obliku u sledećoj formi:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) & \dots & Z_{1n}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) & \dots & Z_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}(p) & Z_{n2}(p) & \dots & Z_{nn}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ \dots \\ I_n(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

U izrazu 2.8 vandijagonalni elementi Z_{ij} uvažavaju međusobno induktivno dejstvo grana i i j . Ukoliko nema međusobnog dejstva, tada je taj deo matrice dijagonalan.

U skraćenom obliku izraz 2.8 se može napisati u matričnoj formi.

$$[U(p)] = [Z(p)][I(p)] - [E_G(p)] \quad (2.9)$$

gde su:

$$\begin{aligned} [E_G(p)] &= \text{vektor elektromotornih sila u svim granama u operatorskom domenu,} \\ [U(p)] &= \text{vektor napona na svim granama u operatorskom domenu,} \\ [I(p)] &= \text{vektor struja kroz sve grane u operatorskom domenu,} \\ [Z(p)] &= \text{matrica operatorskih impedansi.} \end{aligned}$$

Umesto u operatorskom domenu, matrični izrazi za Omov zakom mogu se pisati i za vremenski domen, ali bi u tom slučaju vektori napona i elektromotornih sila bili dati kao trenutne vrednosti, a struje bi bile date u obliku trenutnih vrednosti ili izvoda trenutnih vrednosti u zavisnosti od prirode impedanse grane kroz koju se struja posmatra. Zbog jednostavnosti i generalnog pristupa na ovom mestu se koristi operatorski račun, koji će kasnije biti zamenjen vremenskim domenom.

U slučaju mreže u kojoj ima veći broj grana sa strujnim izvorima može se napisati Omov zakon u matričnom obliku u sledećoj formi:

$$[I(p)] = [Y(p)][U(p)] - [J_G(p)] \quad (2.10)$$

gde su:

$$\begin{aligned} [J_G(p)] &- \text{vektor struja idealnih strujnih izvora u svim granama u operatorskom domenu,} \\ [Y(p)] &- \text{matrica operatorskih admitansi.} \end{aligned}$$

2.3 Definicije grafova električne mreže

Pri objašnjavanju modela stanja električne mreže korišćeni su sledeći pojmovi:

Graf električne mreže se sastoji iz skupa čvorova i orijentisanih grana. Krajeve svake grane čine čvorovi.

Subgraf električne mreže predstavlja podskup grana i čvorova te mreže. Svaki čvor grafa može pripadati jednoj ili više grana.

Stepen čvora predstavlja broj grana koje se stiču u čvor.

Graf je povezan ako se može doći do svakog čvora idući samo po granama grafa.

Snop predstavlja skup grana grafa koje treba ukloniti (prekinuti) da bi se graf raspao na dva nepovezana subgrafa. Uvek se orijentiše prema nekoj izabranoj grani snopa od jednog subgrafa ka drugom.

Kontura grafa predstavlja subgraf koji ima osobinu da su svi njegovi čvorovi stepena 2. Uvek se orijentiše prema nekoj izabranoj grani konture.

Stablo povezanog grafa predstavlja subgraf koji ima osobine da je povezan, da obuhvata sve čvorove grafa i da ne obrazuje konturu.

Ko-stablo predstavlja subgraf sastavljen od elemenata koji ne pripadaju stablu (komplement stabla). Grane ko-stabla nazivaju se spojnicama.

Potpunu informaciju o povezanosti grana i čvorova električne mreže dobijamo iz osnovnih incidentnih matrica.

Osnovne incidentne matrice su matrice koje nose punu informaciju o grafu, a minimalnog su oblika. Rang osnovnih incidentnih matrica jednak je broju vrsta.

U daljem izlaganju će se koristiti incidentne matrice nezavisnih čvorova, osnovnih snopova i osnovnih kontura.

2.4 Incidentne matrice

2.4.1 Matrica čvorova

Kod matrice čvorova $[A_a]$ kolone odgovaraju pojedinim granama, a vrste pojedinim čvorovima. Elementi matrice su $+1$ ako je grana incidentna čvoru i orijentisana od čvora,

-1 ako je grana incidentna čvoru i orijentisana ka čvoru, a 0 ako nije incidentna čvoru. Matrica čvorova ima c vrsta i b kolona, ako je c broj čvorova, a b broj grana.

2.4.2 Matrica snopova

Pod snopom (presekom) se podrazumeva skup od jedne ili više grana, čijim presecanjem se graf raspada na dva subgrafa. Stoga za svaki snop važi prvi Kirhofov zakon da je suma struja u granama koje čine snop jednaka nuli. Ako to nije ispunjeno, to bi značilo da postoji još neka grana kroz koju be se zatvarala struja, a to bi bilo suprotno definiciji snopa kao skupa grana čijim presecanje se graf raspada na dva subgrafa. Smatramo da je snop uopštenje pojma čvora.

Kod matrice snopova $[Q_a]$ kolone odgovaraju pojedinim granama, a vrste pojedinim snopovima. Elementi matrice su $+1$ ako je grana incidentna snopu i orijentacija se poklapa sa orijentacijom snopa, -1 ako je grana incidentna snopu i orijentisana suprotno od orijentacije snopa, a 0 ako nije incidentna snopu. Matrica snopova ima θ vrsta i b kolona, ako je θ broj snopova, a b broj grana.

2.4.3 Matrica kontura

Kod matrica kontura $[B_a]$ kolone odgovaraju pojedinim granama, a vrste pojedinim konturama. Elementi matrice su $+1$ ako se grana nalazi u konturi i ako se poklapaju orijentacije grane i konture; -1 ako se grana nalazi u konturi, ali su suprotnih orijentacija; 0 ako se grana ne nalazi u konturi. Matrica konture sadrži b kolona i μ vrsta gde je b broj grana, a μ broj kontura grafa.

2.5 Osnovne incidentne matrice

Osnovne incidentne matrice su matrice koje nose punu informaciju o grafu, a minimalnog su oblika. Rang osnovnih incidentnih matrica jednak je broju vrsta.

2.5.1 Matrica osnovnih snopova

Matrica osnovnih snopova $[Q_f]$ se dobija na taj način što se prvo za posmatrani graf odredi jedno stablo. Pod osnovnim snopom se podrazumeva snop koji sadrži samo po jednu granu stabla, a sve ostale grane su grane ko-stabla. Orijetacija snopa se slaže

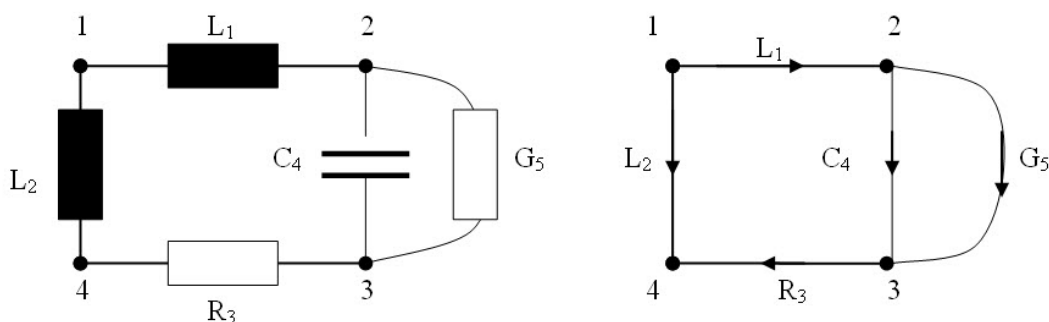
sa orijentacijom grane stabla koja definiše osnovni snop. Broj osnovnih snopova je n . Matrica snopova u kojoj su izbrisane sve vrste koje ne odgovaraju osnovnim snopovima naziva se matricom osnovnih snopova.

2.5.2 Matrica osnovnih kontura

Matrica osnovnih kontura $[B_f]$ se dobija na taj način što se za posmatrani graf odredi jedno stablo. Pod osnovnim konturama grafa se podrazumevaju konture koje sadrže samo po jednu granu ko-stabla, a sve ostale grane su grane stabla. Grana ko-stabla definiše konturu i prema njoj se orijentišemo. Broj osnovnih kontura je $m = b - n$, gde je n broj nezavisnih čvorova, odnosno broj grana stabla, a b ukupan broj grana grafa. Matrica kontura u kojoj su izbrisane sve vrste koje ne odgovaraju osnovnim konturama naziva se matricom osnovnih kontura.

2.5.3 Primer proizvoljne mreže i odgovarajućih incidentnih matrica

Na slici 2.8 prikazana je proizvoljna pasivna mreža sa 5 grana i odgovarajući graf mreže. Čvorovi su obeleženi brojevima, a grane oznakama elemenata grane i brojem u indeksu.



Slika 2.8: Primer pasivne mreže sa 5 grana (levo) i odgovarajući graf mreže (desno)

Izabrane su grane koje čine stablo L_1 , L_2 i R_3 , koje su nacrtane podebljano. Grane ko-stabla čine C_4 i G_5 . Ukupan broj čvorova mreže je $c = 4$, a ukupan broj grana je $b = 5$.

Matrica čvorova ima sledeći oblik:

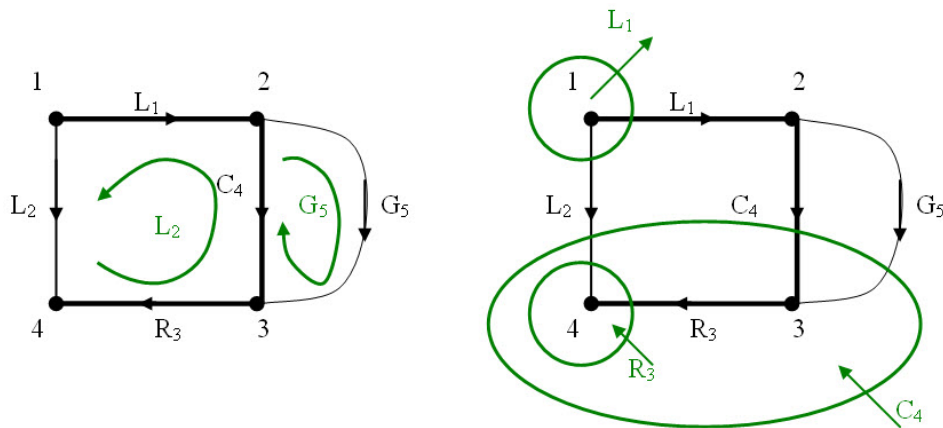
$$[A] = \begin{matrix} & L_1 & L_2 & R_3 & C_4 & G_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.11)$$

Iznad matrice čvorova označene su grane koje definišu kolone, a sa leve strane ispisani su brojevi čvorova koji definišu vrstu.

Matrica nezavisnih čvorova se dobija kada se bilo koji čvor mreže proglasi referentnim čvorom. U slučaju kada se čvor 3 proglasi referentnim čvorom, u matrici nezavisnih čvorova se briše vrsta koja odgovara referentnom čvoru. U tom slučaju matrica nezavisnih čvorova ima sledeći oblik:

$$[A_f] = \begin{matrix} & L_1 & L_2 & R_3 & C_4 & G_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.12)$$

Na slici 2.9 definisane su grane koje definišu stablo (grane L_1 , C_4 i R_3) kojima pripadaju svi čvorovi, a ne formiraju konturu. Takođe su definisane spojnice (grane koje definišu konture). Na slici 2.9 levo grane L_2 i G_5 svojim smerovima definišu smer konture. Snopove čini skup grana čijim bi presecanjem se graf raspao na dva nezavisna subgrafa. Snopove čine po jedna grana stabla, koja definiše orijentaciju snopa, a ostale grane su spojnice. Na slici 2.9 desno, grana L_1 definiše snop koji čine grane L_1 i L_2 i odvaja čvor 1 od ostatka mreže. Snop koji čine grane L_2 , C_4 i G_5 , koji je definisan granom C_4 deli mrežu na dve nezavisne mreže. Snop koji čine grane L_2 , R_3 odvaja čvor 3 od ostatka mreže.



Slika 2.9: Primer definisanja stabla, nezavisnih kontura i osnovnih snopova

Osnovne konture obeležene su istom oznakom kao grane ko-stabla koja definiše konturu. Pored svake vrste sa leve strane matrice, napisana je oznaka grane koja definiše konturu. Matrica osnovnih kontura ima sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} B_f \end{bmatrix} = \begin{matrix} & L_1 & L_2 & R_3 & C_4 & G_5 \\ L_2 & \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.13)$$

Osnovni snopovi označeni su granama stabla koje obeležavaju odgovarajuće vrste koje odgovaraju snopovima. Oznake su napisane sa leve strane incidentne matrice. Matrica osnovnih snopova ima sledeći oblik:

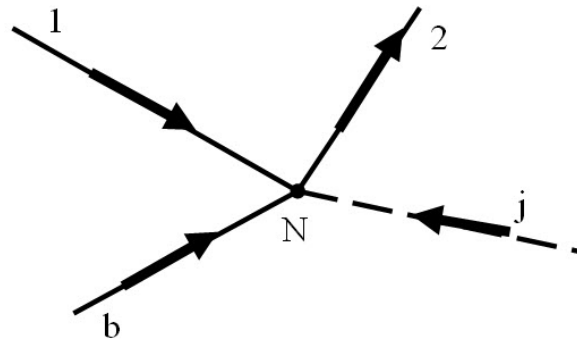
$$\begin{bmatrix} Q_f \end{bmatrix} = \begin{matrix} & L_1 & L_2 & R_3 & C_4 & G_5 \\ L_1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.14)$$

2.5.4 Kirhofovi zakoni u matričnom obliku

I Kirhofov zakon u matričnom obliku za mrežu sa koncentrisanim parametrima se može pisati za nezavisne čvorove ili za osnovne snopove. Drugi Kirhofov zakon se piše za osnovne konture. Na ovaj način zapisani Kirhofovi zakoni čine sistem linearnih jednačina.

Prvi Kirhofov zakon za nezavisne čvorove

Posmatrajmo čvor N koji nije referentni čvor neke mreže.



Slika 2.10: I Kirhofov zakon za čvor N

Prvi Kirhofov zakon za čvor N ima sledeći oblik:

$$\sum_{j=1}^b a_{Nj} \cdot i_{Nj} = 0 \quad (2.15)$$

gde su:

i_{Nj} - struje u grani j vezanoj za čvor N ,

b - ukupan broj grana mreže,

a_{Nj} - elemenat matrice incidencija čvorova $[A]$ koji ima vrednost $+1$ ako je grana j incidentna čvoru N i orijentisana od čvora, -1 ako je grana j incidentna čvoru N i orijentisana ka čvoru, a 0 ako nije incidentna čvoru.

Članovi matrice a_{Nj} predstavljaju elemente vrste N matrice čvorova $[A]$. Prvi Kirhofov zakon za svih c čvorova se može napisati u matričnom obliku:

$$[A_f] \cdot [i] = [0] \quad (2.16)$$

gde su:

$[i]$ - vektor struja svih grana,

$[A_f]$ - matrica nezavisnih čvorova, sa brojem vrsta c i brojem kolona b ,

$[0]$ - vektor reda c , čiji su svi elementi 0 ,

c - broj čvorova mreže,

b - broj grana mreže.

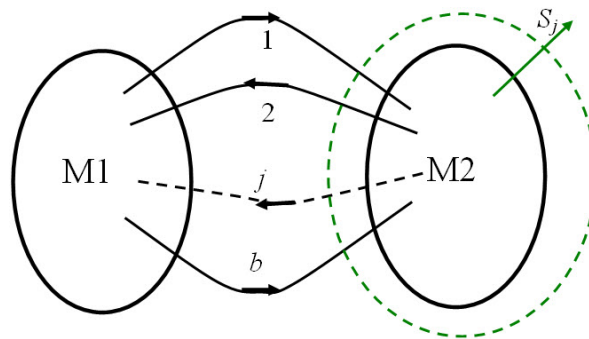
Elementi vektora $[i]$ se po redosledu slažu sa kolonama matrice $[A_f]$.

Prvi Kirhofov zakon za osnovne snopove

Prvi Kirhofov zakon o kontinuitetu struja ilustrovan je na primeru snopa koji je uopštenje pojma čvora u I Kirhovovom zakonu. Na slici 2.11 prikazan je snop koji se sastoji od grana $1, 2, \dots, j, \dots, b$, čijem presecanjem se graf mreže raspada na subgrafove M_1 i M_2 .

Grane koje pripadaju snopu su jedine grane koje su spojene sa podmrežama M_1 , odnosno M_2 , pa mora suma struja na tim granama da bude jednaka nuli, jer ne postoji ni jedna dodatna grana po kojoj bi se struje zatvarale. Zbog toga se može napisati opšti oblik prvog Kirhofovog zakona za snop S_j .

$$\sum_{j=1}^b q_{j,S_j} \cdot i_{j,S_j} = 0 \quad (2.17)$$



Slika 2.11: Ilustracija I Kirhofovog zakona za jedan snop

Koeficijenti q_{j,S_j} ($j = 1, 2, \dots, b$) označavaju elemente matrice incidencije koji imaju vrednosti $+1$ ako je grana incidentna snopu S_j i orijentacija se poklapa sa orijentacijom snopa, -1 ako je grana incidentna snopu S_j i orijentisana suprotno od orijentacije snopa, a 0 ako nije incidentna snopu. Ako se posmatra svih n osnovnih snopova, prvi Kirhofov zakon za osnovne snopove glasi:

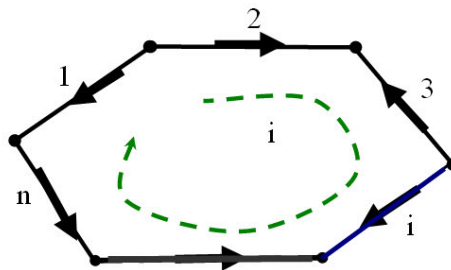
$$[Q_f] \cdot [I] = [0] \quad (2.18)$$

gde je $[Q_f]$ - matrica osnovnih snopova.

Za čvorove i snopove važi zakon kontinuiteta, tako da se smatra da je snop uopštenje čvora. Elementi vektora struja $[I]$ se po redosledu slažu sa kolonama matrice $[Q_f]$.

Drugi Kirhofov zakon za osnovne konture

Na slici 2.12 prikazana je jedna kontura čija je jedina grana koja pripada ko-stablu i , dok sve ostale grane pripadaju stablu. Zbog toga je kontura obeležena istom oznakom kao grana koja je definiše, odnosno i .

Slika 2.12: Jedna kontura sa n grana za koju se definiše II Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon za konturu i ima sledeći oblik:

$$\sum_{j=1}^b b_{ij} \cdot u_{ij} = 0 \quad (2.19)$$

Koeficijent b_{ij} za granu j i konturu i ima vrednost $+1$ ako se grana j nalazi u konturi i i ako se poklapaju orijentacije grane i konture; -1 ako se grana j nalazi u konturi i , ali su suprotnih orijentacija; 0 ako se grana ne nalazi u konturi i .

Koeficijenti b_{ij} , ($j = 1, 2, \dots, b$) su elementi jedne vrste koja odgovara konturi i matrice kontura. Ako se posmatra svih m osnovnih kontura, drugi Kirhofov zakon se može pisati u matičnom obliku:

$$[B_f] \cdot [U] = [0] \quad (2.20)$$

Elementi vektora $[U]$ se po redosledu slažu sa kolonama matrice $[B_f]$.

2.5.5 Veze grana stabla i ko-stabla u incidentnim matricama

Uveden je indeks 1 za grane stabla u kolonama matrica incidencija, a indeks 2 za grane ko-stabla, pa je redosled kolona preuređen tako da prve kolone budu za grane stabla, a zatim dolaze grane ko-stabla. U matrici osnovnih snopova postoji samo jedna grana stabla koja je incidentna snopu, sve ostale su grane ko-stabla. Vrste u matrici osnovnih snopova odgovaraju pojedinim snopovima. Zbog toga prvih n kolona koji odgovara granama stabla i n vrsta koje odgovaraju snopovima definisanih granama stabla čine jediničnu submatricu I_n kvadratnog oblika reda n .

Sada se može matrica snopova pisati u sledećem obliku:

$$[Q_f] = [I_n | Q_{12}] \quad (2.21)$$

$[Q_{12}]$ je submatrica osnovnih snopova čije kolone odgovaraju granama ko-stabla.

Ako se promeni redosled pisanja kolona matrice osnovnih kontura, tada se ona može napisati u sledećem obliku:

$$[B_f] = [B_{11} | I_m] \quad (2.22)$$

$[B_{11}]$ je submatrica osnovnih kontura čije kolone odgovaraju granama stabla.

$[I_m]$ je jedinična submatrica m -tog reda osnovnih kontura čije kolone odgovaraju granama ko-stabla, koje definišu osnovne konture.

Postoji sledeća zakonitost:

$$[Q_{12}] = -[B_{11}]^t \quad (2.23)$$

gde je $[B_{11}]^t$ transponovana matrica $[B_{11}]$.

Na osnovu relacije 2.21 može se prvi Kirhofov zakon 2.18 pisati u sledećem obliku:

$$[I_n|Q_{12}] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [0] \quad (2.24)$$

gde je $[I_n]$ - jedinična matrica reda n ,

$[I_1]$ i $[I_2]$ su struje granama stabla i ko-stabla.

Na osnovu relacije 2.22 može se drugi Kirhofov zakon pisati u obliku:

$$[B_{11}|I_m] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [0] \quad (2.25)$$

Iz 2.24 dobija se veza između struja grana stabla na osnovu struja u granama ko-stabla.

$$[I_1] = -[Q_{12}] \cdot [I_2] \quad (2.26)$$

Na isti način se iz 2.25 dobija veza između napona grana ko-stabla na osnovu napona na granama stabla.

$$[U_2] = [Q_{12}]^t \cdot [U_1] \quad (2.27)$$

Oba Kirhofova zakona se mogu pisati u zajedničkoj formi:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_{12} \\ -B_{11} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.5.6 Normalno stablo

Formiranje normalnog stabla predstavlja prvu fazu u formiranju jednačina stanja električne mreže, koje predstavljaju minimalan sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koje omogućavaju jednostavno numeričko rešavanje. Pod normalnim stablom se podrazumeva stablo koje sadrži maksimalan broj kapacitivnih i minimalan broj induktivnih grana.

Cilj formiranja normalnog stabla je da u jednačinama stanja figuriraju samo naponi na kondenzatorima koji pripadaju stablu i struje na kalemovima koje pripadaju ko-stablu. Na taj način se postiže minimalan oblik jednačina stanja.

Uvedimo oznake za stabla pojedinih subgrafova: $T_{\overline{el_1}, el_2}$ -stablo u mreži sastavljenoj od elemenata el_2 , dok su elementi $\overline{el_1}$ kratko spojeni, a ostali uklonjeni. Formiranje normalnog stabla vrši se u 4 koraka:

I korak: Formiranje stabla T_C (stablo u mreži koja sadrži samo kapacitivne grane, dok su sve ostale grane prekinute).

II korak: Formiranje stabla $T_{\overline{C}, G}$ (stablo u mreži koja sadrži samo provodnosti, dok su grane sa kapacitivnostima kratko spojene, a ostale grane prekinute). Skup grana ovog stabla predstavlja prazan skup zbog toga što su G elementi uvek u kapacitivnim konturama (odnosno paralelni kondenzatrima), koji se ovom prilikom kratko spajaju.

III korak: formiranje stabla $T_{\overline{C}, \overline{G}, R}$ (stablo u mreži sastavljenoj od otpornosti, dok su kapacitivnosti i provodnosti kratko spojene, a ostali elementi prekinuti).

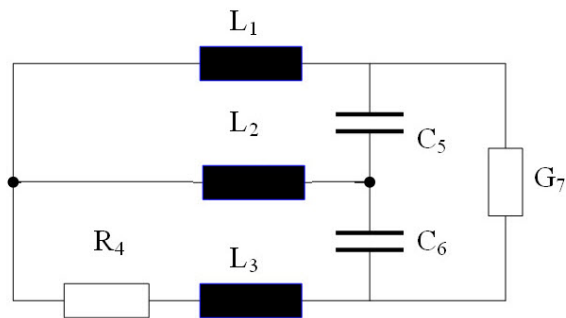
IV korak: Formiranje stabla $T_{\overline{C}, \overline{G}, \overline{R}, L}$ (stablo u mreži u kojoj su svi elementi osim induktivnosti kratko spojeni). Normalno stablo predstavlja uniju ovih stabala:

$$T = T_C \cup T_{\overline{C}, G} \cup T_{\overline{C}, \overline{G}, R} \cup T_{\overline{C}, \overline{G}, \overline{R}, L} \quad (2.29)$$

2.5.7 Primer određivanja normalnog stabla

Na slici 2.13 prikazana je proizvoljna mreža za koju se određuje normalno stablo.

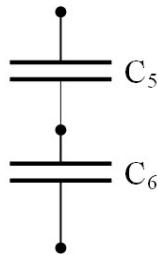
Normalno stablo će se formirati korak po korak.



Slika 2.13: Električna mreža za koje se određuje normalno stablo

I korak

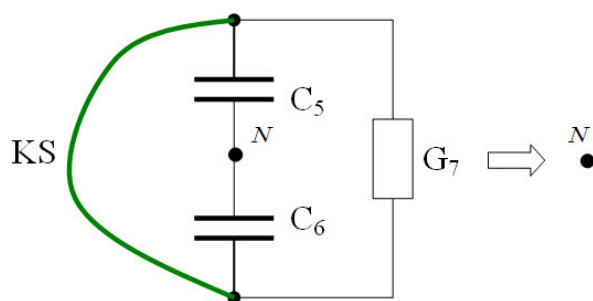
U prvom koraku se formira mreža koju čini deo stabla od kapacitivnih grana T_C , dok su ostale grane uklonjenje. Skica ovog stabla data je na slici 2.14.

Slika 2.14: Mreža koju čini deo stabla od kapacitivnih grana T_C , dok su ostale grane uklonjenje**II korak**

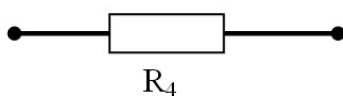
Formiranje stabla $T_{\overline{CG}}$ koji predstavlja prazan skup, jer su kapacitivnosti kratko spojene. Na slici 2.15 ilustrovan je II korak formiranja normalnog stabla iz koga se vodi da ni jedna grana ne može da se pridruži normalnom stablu. Od cele mreže preostaje samo zajednička tačka N bez ijedne grane.

III korak

Formiranje stabla $T_{\overline{CGR}}$ koji predstavlja stablo u mreži koja se sastoji od otpornika, dok su kondenzatori i omske provodnosti kratko spojene. kao na slici 2.16.



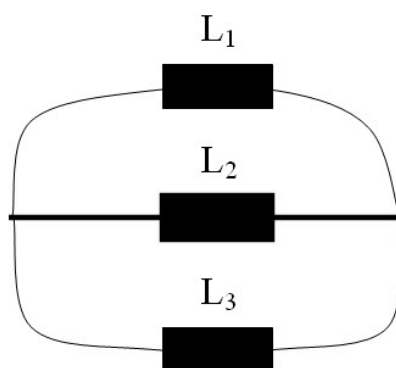
Slika 2.15: Ilustracija II koraka formiranja normalnog stabla, koji praktično nema doprinos



Slika 2.16: Formiranje stabla u mreži sa otpornicima

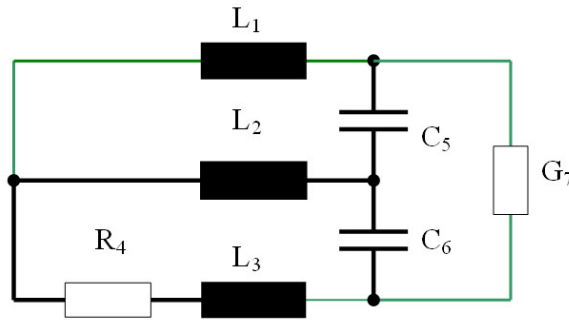
IV korak

Formiranje stabla u mreži u kojoj su svi elementi osim induktivnih kalemova kratko spojeni $T_{\overline{CGR}L}$ kao na slici 2.17.



Slika 2.17: Formiranje stabla u mreži sa kalemovima

Konačan izgled normalnog stabla, koje je označeno podebljanim linijama, dat je na slici 2.18.



Slika 2.18: Kompletna mreža sa normalnim stablom nacrtanim podebljanim crnim linijama

2.6 Jednačine stanja

2.6.1 Definicija jednačine stanja

Jedan od pristupa modelovanju mreže u prelaznom periodu je pretstavljjanje elemenata mreža šemama sa koncentrisanim parametrima. Matematički model mreža u prelaznom režimu može se opisati sistemom diferencijalnih jednačina stanja.

Pod sistemom diferencijalnih jednačina stanja se podrazumeva sistem diferencijalnih jednačina prvog reda napisanih tako da su svi izvodi promenljivih sa leve strane, a promenljive na desnoj strani. Promenljive čiji izvodi figuriraju u diferencijalnim jednačinama se nazivaju promenljivim stanja. Ostale promenljive se nazivaju algebarskim promenljivim. Ovakav sistem diferencijalnih jednačina naziva se normalizovanim sistemom diferencijalnih jednačina.

U opštem slučaju sistem diferencijalnih jednačina u normalnom obliku ima sledeću formu:

$$[x'] = [M] \cdot [x] + [F(t)] \quad (2.30)$$

$$[y] = [N] \cdot [x] + [G(t)] \quad (2.31)$$

gde su:

$[x]$, $[x']$ – vektori promenljivih stanja i njihovi izvodi po vremenu,

$[y]$ – algebarske promenljive, promenljive čiji izvodi ne figurišu u diferencijalnim jednačinama,

$[M]$, $[N]$ – kvadratne matrice koeficijenata. U slučaju da ovi koeficijenti nisu konstante, već su funkcije nekih promenljivih, sistem jednačina stanja je nelinearan. To su slučajevi nelinearne karakteristike magnećenja transformatora, nelinearnih otpora

odvodnika prenapona, nelinearnog otpora luka i drugi slučajevi. U slučaju da dolazi do promene vrednosti elemenata u vremenu, to se naziva nestacionarnim sistemom.

$[F(t)], [G(t)]$ – vektori funkcija izvora.

2.6.2 Diferencijalne jednačine stanja električne mreže

Rešavanjem jednačina stanja dobijaju se sve promenljive u mreži, za razliku od klasičnog postupka kada se cela mreža rešava po jednoj promenljivoj. Jednačine stanja predstavljaju sistem od n diferencijalnih jednačina prvog reda, dok bi se klasičnim postupkom sistem sveo na jednu jednačinu n -tog reda. Pored jednostavnog rešavanja na računaru prednost ovog postupka je što se istovremeno može izračunati više promenljivih stanja. U opštem slučaju jednačine dinamičke ravnoteže imaju sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du_1/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & K \\ -K^t & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_c \\ E_L \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Jednačine stanja električne mreže imaju sledeći opšti oblik nakon izdvajanja izvoda električnih veličina na levu stranu:

$$\begin{bmatrix} du_1/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ - \begin{bmatrix} G & K \\ -K^t & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_c \\ E_L \end{bmatrix} \right\} \quad (2.33)$$

Oznake u gornjem izrazu imaju sledeće značenje:

$[C]$ –kvadratna matrica kapacitivnosti snopova,

$[L]$ –kvadratna matrica induktivnosti kontura,

$[G]$ –kvadratna matrica provodnosti snopova,

$[K]$ –matrica veza izmedju električnih veličina snopova i kontura,

$[K]^t$ –transponovana matrica $[K]$,

$[u_1]$ –vektor napona na kapacitivnim grana stabla,

$[i_2]$ –vektor struja kroz induktivne grane ko-stabla,

$[I_c]$ –vektor struja ekvivalentnih strujnih izvora priključenih u kapacitivne snopove,

$[E_L]$ –vektor elektromotornih sila ekvivalentnih naponskih izvora u induktivnim konturama.

Matrica kapacitivnosti snopova se dobija na sledeći način:

$$[C] = [C_1] + [Q_{c_1, c_2 g_2}][C_2][Q_{c_1, c_2 g_2}]^t \quad (2.34)$$

gde su:

$[C_1]$ —dijagonalna matrica čiji su elementi na dijagonali kapacitivnosti u granama normalnog stabla,

$[C_2]$ —dijagonalna matrica čiji su elementi na dijagonali kapacitivnosti u granama ko-stabla,

$[Q_{c_1, c_2 g_2}]$ —submatrica osnovnih snopova definisana kapacitivnim granama stabla čije kolone odgovaraju kapacitivnostima ili provodnostima grana ko-stabla.

Matrica provodnosti snopova definiše se na sledeći način:

$$[G] = [Q_{c_1, c_2 g_2}][G_2][Q_{c_1, c_2 g_2}]^t \quad (2.35)$$

gde je $[G_2]$ dijagonalna matrica čiji su elementi na dijagonali provodnosti grana ko-stabla.

Matrica induktivnosti kontura dobija se na sledeći način:

$$[L] = \begin{bmatrix} B_{L_2, L_1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_{12} \\ L_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{L_2, L_1}^t \\ I \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

gde su:

$[L_1]$ —kvadratna matrica čiji su elementi na dijagonali sopstvene induktivnosti pojedinih grana stabla, a elementi van glavne dijagonale međusobne induktivnosti pojedinih grana stabla,

$[L_2]$ —kvadratna matrica čiji su elementi na dijagonali sopstvene induktivnosti pojedinih grana ko-stabla, a elementi van glavne dijagonale međusobne induktivnosti pojedinih grana ko-stabla,

$[L_{12}]$ —pravougaona matrica čiji su elementi međusobne induktivnosti grana stabla i grana ko-stabla,

$[L_{21}] = [L_{12}]^t$ —pravougaona matrica čiji su elementi međusobne induktivnosti grana ko-stabla i grana stabla,

$[I]$ —jedinična matrica,

$[B_{L_2, L_1}]$ —submatrica osnovnih kontura definisana induktivnostima grana ko-stabla čije kolone odgovaraju induktivnostima u granama stabla.

Matrica otpornosti induktivnih kontura dobija se na isti način kao što se dobija matrica induktivnosti $[L]$, jer se svakoj induktivnoj grani pridružuje odgovarajuća otpornost, odnosno:

$$[R] = [B_{L_2, L_1} \quad I] \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{L_2, L_1}^t \\ I \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

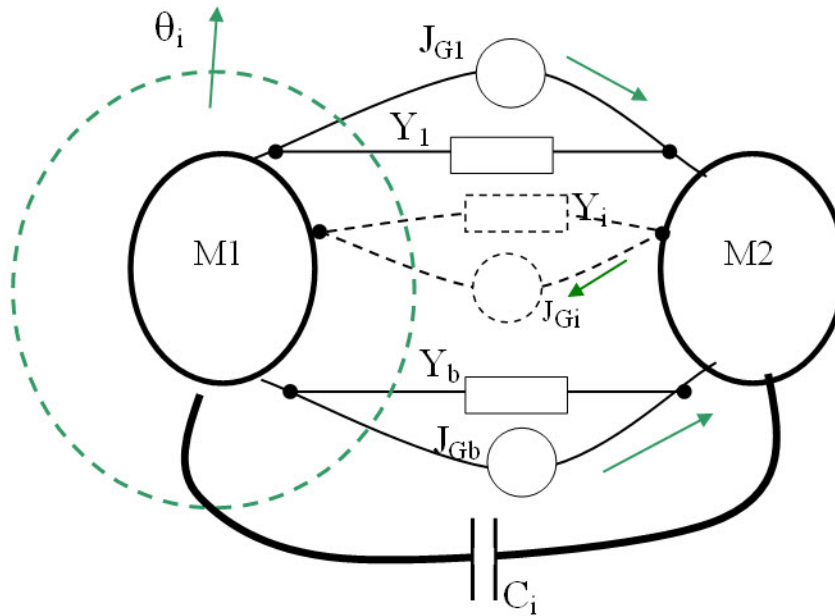
gde su:

$[R_1]$ —dijagonalna matrica čiji su elementi na dijagonali otpornosti u odgovarajućim induktivnim grana stabla.

$[R_2]$ —dijagonalna matrica čiji su elementi na dijagonali otpornosti pojedinih induktivnih grana ko-stabla.

Matrica veza je $[K] = [Q_{c_1, L_2}]$ je submatrica osnovnih snopova definisana kapacitivnim granama stabla čije kolone odgovaraju induktivnostima u granama ko-stabla.

Vektor struja strujnih izvora kapacitivnih snopova I_c se može direktno izračunati kao suma struja svih strujnih izvora priključenih u dati snop definisan kapacitivnom granom C_i , kao na slici 2.19.



Slika 2.19: Određivanje ekvivalentnog strujnog izvora jednog snopa

Znak "+" uz struju izvora u sumi dolazi ako je orijentacija strujnog izvora suprotna orijentaciji snopa, a u suprotnom je predznak struje "-". Za jedan snop se struja ekviva-

lennog strujnog izvora dobija iz izraza:

$$I_{\theta_c} = \sum_{i=1}^b \pm J_{G_i} \quad (2.38)$$

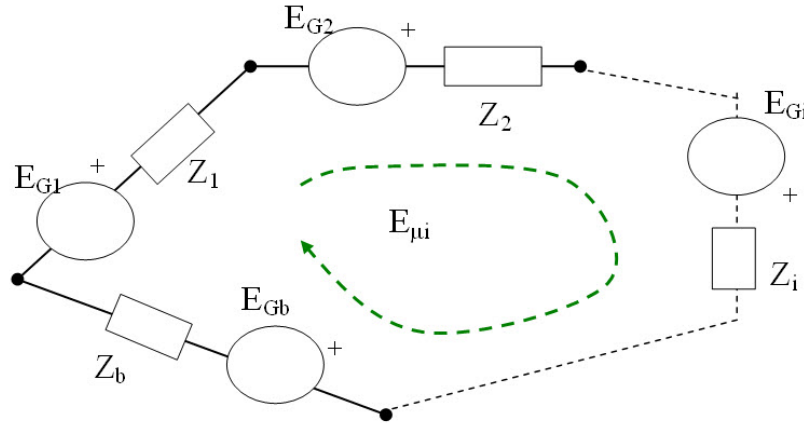
gde su:

I_{θ_c} —struja ekvivalentnog strujnog izvora u odgovarajućem snopu θ_c ,

J_{G_i} —struja strujnog izvora G_i u grani i koja pripada snopu θ_c .

Postupak se ponavlja za sve snopove.

Vektor elektromotornih sila naponskih izvora se dobija kao algebarska suma svih elektromotornih sila u posmatranoj konturi, kao na slici 2.20.



Slika 2.20: Dobijanje ekvivalentnog naponskog izvora konture

Znak "+" u sumi dolazi kada je orijentacija naponskog izvora u skladu sa orijentacijom konture, u suprotnom je predznak "-". Za jednu konturu se elektromotorna sila ekvivalentnog naponskog izvora dobija iz izraza:

$$E_{\mu L} = \sum_{i=1}^b \pm E_{G_i} \quad (2.39)$$

gde su:

$E_{\mu L}$ —ekvivalentna elektromotorna sila konture μ_L ,

E_{G_i} —elektromotorna sila naponskog izvora u grani i koji pripada snopu μ_L . Postupak se ponavlja za sve snopove.

U jednačinama stanja figuriraju kao promenljive samo naponi na kapacitivnostima stabla i struje kroz induktivnosti ko-stabla.

Matrice kapacitivnosti snopova i induktivnosti kontura uvek su nesingularne i pozitivno definitne matrice, sem kada postoje idealno spregnute induktivnosti. Kako se idealna sprega međusobnih induktivnosti fizički ne može ostvariti, matrica induktivnosti je uvek nesingularna. Zbog toga se uvek može izvršiti inverzija matrica induktivnosti kontura i kapacitivnosti snopova, tako da na levoj strani diferencijalnih jednačina stanja 2.33 figuriraju samo izvodi promenljivih stanja, a na desnoj same promenljive stanja.

Broj promenljivih stanja jedne električne mreže jednak je zbiru broja kondenzatora u granama normalnog stabla i broja induktivnih grana ko-stabla. U slučaju da postoje induktivni snopovi ili kapacitivne konture, broj promenljivih stanja se smanjuje za broj osnovnih kontura definisanih kapacitivnostima i broj osnovnih snopova definisanih induktivnostima. Ovo su slučajevi tzv. topološke degeneracije modela stanja.

Radi uprošćenja jednačina stanja redno vezana induktivnost i otpornost tretiraju se kao jedna grana. Pri formiranju matrica incidencija takva grana se tretira kao grana sa induktivnošću. Kada se formira matrica $[R]$, jednostavno se prepisuju na odgovarajućim mestima elementi $R_1, R_2, \dots, R_k$ kao što su napisani elementi $L_1, L_2, \dots, L_k$ u matrici $[L]$. Na mestima gde u matrici $[L]$ figurišu međusobne induktivnosti u matrici $[R]$ su nule.

Prilikom formiranja izraza 2.33 uvedena je pretpostavka da ne postoji ni jedna grana ko-stabla definisana omskim otpornikom. Elektroenergetske mreže imaju neke tipične karakteristike elemenata. Jedna od karakteristika je da se izuzetno retko može sresti idealan otpornik bez induktiviteta, što značajno olakšava formiranje jednačina stanja električne mreže.

Rešavanjem jednačina stanja se dobijaju naponi na kondenzatorima u granama stabla $[U_{C1}]$ i struje u granama ko-stabla $[I_{L2}]$. Algebarske promenljive su naponi na kondenzatorima u granama ko-stabla $[U_{C2}]$ i struje u granama stabla $[I_{L1}]$. Ove veličine se dobijaju iz sledećih matričnih relacija.

$$[i_1] = [B_{L_2, L_1}]^T \cdot [i_2] \quad (2.40)$$

i

$$[u_2] = [Q_{C_1, C_2}]^T \cdot [u_1] \quad (2.41)$$

Promenljive stanja u_1 i i_2 koje se dobijaju rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina 2.33 zajedno sa dopunskim algebarskim jednačinama 2.40 i 2.41 čine pun sistem jednačina koji daje sve potrebne električne promenljive.

Primena opisanog postupka formiranja matričnog sistema jednačina stanja se može vrlo lako automatizovati pod sledećim uslovima:

- U mreži ne postoje otporničke grane koje se ne mogu redno vezati sa induktivnom granom ili paralelno vezati sa kapacitivnom granom.
- U mreži ne postoji ni jedan kondenzator koji se nalazi u normalnom stablu, koji nije vezan prema zemlji. To obezbeđuje da je zemlja referentna tačka kola.
- Svakoј induktivnoj grani se može pridodati otpornička grana i svakoј kapacitivnoj grani se može pridodati paralelna grana sa provodnošću.

Formiranja modela se vrši na bazi incidentnih matrica snopova i kontura i dijagonalnih matrica kapacitivnih i induktivnih elemenata.

2.6.3 Opšti oblik trofaznog modela stanja

Za trofaznu mrežu se može formirati opšti trofazni oblik modela stanja uzimajući u obzir i moguće postojanje elemenata sa izolovanom neutralnom tačkom. U neutralnu tačku se mogu postaviti kondenzatori čiji kapaciteti odgovaraju nultim komponentama kapaciteta namotaja u slučaju transformatora ili motora, koje su za j -ti element obeležene kao C_{Z_j} .

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} C_{Z_1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & C_{Z_j} \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} C_F & -C_M & -C_M \\ -C_M & C_F & -C_M \\ -C_M & -C_M & C_F \end{matrix}} & 0 \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{\begin{matrix} L_F & L_M & L_M \\ L_M & L_F & L_M \\ L_M & L_M & L_F \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Matricu definisanu izrazom 2.42 nazivamo matricom kapaciteta i induktiviteta i skraćeno označavamo kao:

$$[M_{LC}] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Matrica $[M_{LC}]$ je po svom obliku kvazidijagonalna, odnosno sastoji se od kvadratnih simetričnih submatrica koje su na glavnoj dijagonali.

Prvi blok elemenata C_{Z_1} do C_{Z_j} predstavlja dijagonalni deo matrice sa elementima koji odgovaraju kapacitivnostima smeštenim u neutralnim tačkama transformatora ili drugih elemenata. Najčešće je broj kapacitivnosti u zvezdištima mali (1 ili 2). Ove kapacitivnosti su monofazne, jer su postavljene između neutralne tačke i zemlje, stoga ne postoje vandijagonalni elementi. Vrednost ovih kondenzatora se usvaja na osnovu nulte kapacitivnosti namotaja transformatora. Ove kapacitivnosti su važne jer se na njima izračunava napon u zvezdištu i u slučaju potrebe primenjuje odvodnik prenapona.

Dijagonalni kvadratni blokovi ostalih elemenata su uvek simetrični. Prvi niz kvadratnih blokova čine matrice kapacitivnih elemenata dimenzija 3×3 . Drugi niz kvadratnih blokova čine matrice induktivnih elemenata, takođe dimenzija 3×3 .

Matrica proporcionalnih elemenata ima oblik:

$$\begin{bmatrix} G & K \\ -K^t & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} G_{Z_1} & 0 \\ 0 & \dots & G_{Z_j} \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} G_F & -G_M & -G_M \\ -G_M & G_F & -G_M \\ -G_M & -G_M & G_F \end{matrix}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} R_F & 0 & 0 \\ 0 & R_F & 0 \\ 0 & 0 & R_F \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Svi izvori se mogu podeliti na realne generatore reprezentovane svojim elektromotornim silama (ems) koji će u vremenskom domenu biti obeleženi sa $e(t)$, i naponskim i strujnim izvorima koji služe za kompenzaciju delova kola koji su predstavljeni raspoređenim parametrima. Pri rešavanju prelaznih režima usled sklopnih operacija u trofaznim kolima, svaki realni generator koji pripada grani i se reprezentuje svojom trofaznom ems sledećeg oblika:

$$[e_i(t)] = \begin{bmatrix} e_{iA}(t) \\ e_{iB}(t) \\ e_{iC}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{Mi} \cos(\omega t - \varphi) \\ E_{Mi} \cos(\omega t - \varphi - 120^\circ) \\ E_{Mi} \cos(\omega t - \varphi - 240^\circ) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Oznake u izrazu 2.45 imaju sledeće značenje:

$e_i(t)$ - vektor trenutnih faznih ems za generator br. i ,

e_{iF} - trenutne fazne vrednosti ems generatora i za faze $F = A, B, C$,

E_{Mi} - temene fazne vrednosti ems generatora koje se po pravilu podešavaju tako da u stacionarnom stanju u mreži maksimalni fazni naponi budu što bliži maksimalnim radnim naponima mreže izraženim preko temenih faznih vrednosti, odnosno:

$$U_{fm} = U_m \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (2.46)$$

U_m - maksimalni radni napon mreže izražen preko efektivne linijske vrednosti, kao što je to uobičajeno,

U_{fm} -maksimalni radni napon mreže izražen preko temene fazne vrednosti, što se koristi u proračunima prelaznih procesa,

φ - početna faza ems, od koje zavisi visina prenapona u trenutku komutacije.

2.7 Rešavanje jednačina stanja

U najopštijem slučaju numeričko rešavanje jednačine stanja koje su date izrazom 2.30 može se izvršiti sledećim postupkom [27]:

$$[x(t)] = [x(t - \Delta t)] + \int_{u=t-\Delta t}^{u=t} \{[M] \cdot [x(u)] + [F(u)]\} \cdot du \quad (2.47)$$

gde oznake imaju sledeće značenje:

$$[M] = - \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G & K \\ -K^t & R \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_c \\ E_L \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

U vektoru $[E_L]$ figurišu između ostalih i elektromotorne sile realnih generatora opisanih izrazom 2.45.

2.7.1 Trapezno pravilo

Ako se izvrši linearna interpolacija promenljivih stanja $[x]$ i $[F]$ na intervalu $t - \Delta t$ i t , dobija se izraz:

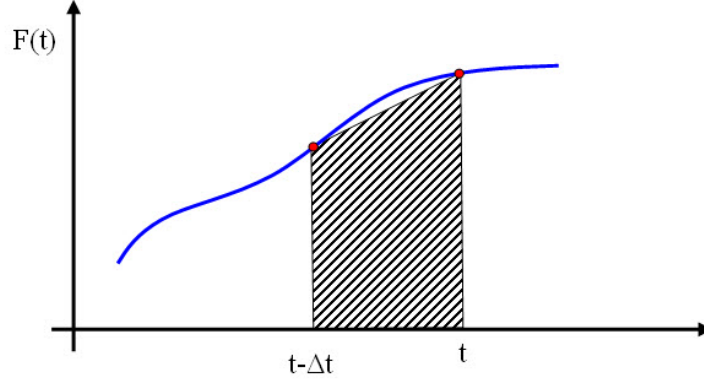
$$[x(t)] = [x(t - \Delta t)] + \frac{\Delta t}{2} \cdot [M] \cdot \{[x(t - \Delta t)] + [x(t)]\} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \{[F(t - \Delta t)] + [F(t)]\} \quad (2.50)$$

Sa druge strane se jednačina 2.50 može posle diskretizacije vremena sa korakom Δt napisati u sledećem obliku:

$$\frac{[x(t)] - [x(t - \Delta t)]}{\Delta t} = [M] \frac{[x(t)] + [x(t - \Delta t)]}{2} + \frac{[F(t)] + [F(t - \Delta t)]}{2} \quad (2.51)$$

U izrazu 2.51 korišćeno je trapezno pravilo, koje je ilustrovano na primeru funkcije izvora na slici 2.21.

Linearnom interpolacijom se dobija šrafirana površina ispod krive koja odgovara integralu funkcije $F(t)$ na vremenskom segmentu Δt ,



Slika 2.21: Primena trapeznog pravila za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina

Nakon prebacivanja vektora promenljivih stanja $[x(t)]$ sa desne na levu stranu i $[x(t - \Delta t)]$ sa leve na desnu stranu se dobija:

$$\left([I] - \frac{\Delta t}{2} [M] \right) [x(t)] = \left([I] - \frac{\Delta t}{2} [M] \right) [x(t - \Delta t)] + \frac{\Delta t}{2} \cdot ([F(t - \Delta t)] + [F(t)]) \quad (2.52)$$

gde oznaka $[I]$ označava jediničnu matricu čiji je red jednak broju promenljivih stanja, odnosno:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Dok se korak proračuna ne menja niti se menja konfiguracija kola, matrica $[M]$ ostaje konstantna, tako da se i matrica $([I] - [M] \cdot \Delta t/2)$ ne menja. Stoga se može jednom izvršiti inverzija matrice $([I] - [M] \cdot \Delta t/2)$ i zatim rešavati prelazni proces na osnovu sledeće relacije:

$$[x(t)] = [x(t - \Delta t)] + \left([I] - [M] \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{[F(t)] - [F(t - \Delta t)]}{2} \quad (2.54)$$

2.7.2 Metoda Runge-Kuta 4. reda

Metoda Runge-Kuta služi za rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću koraka u sredini intervala kako bi se smanjile numeričke greške. Najpoznatija i najčešće korištena je metoda Runge-Kutta četvrtog reda. Postupak rešavanja diferencijalne jednačine dat je izrazom:

$$[x(t)] = [x(t - \Delta t)] + \frac{1}{6} \times [K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4] \quad (2.55)$$

gde su:

- $[x(t)]$ - vektor promenljivih stanja u trenutku t ,
 Δt - korak integraljenja

Ostale oznake date su u sledećoj listi:

$$\begin{aligned}
 [K_1] &= \Delta t \cdot [M] \cdot [x(t - \Delta t)] + \Delta t \cdot [F(t - \Delta t)] \\
 [x(t - \frac{\Delta t}{2})] &= [x(t - \Delta t) + \frac{K_1}{2}] \\
 [K_2] &= \Delta t \cdot [M] \cdot [x(t - \frac{\Delta t}{2})] + \Delta t \cdot [F(t - \frac{\Delta t}{2})] \\
 [x(t - \frac{\Delta t}{2})] &= [x(t - \Delta t)] + [\frac{K_2}{2}] \\
 [K_3] &= \Delta t \cdot [M] \cdot [x(t - \frac{\Delta t}{2})] + \Delta t \cdot [F(t - \frac{\Delta t}{2})] \\
 [x(t)] &= [x(t - \Delta t)] + [K_3] \\
 [K_4] &= \Delta t \cdot [M] \cdot [x(t)] + \Delta t \cdot [F(t)]
 \end{aligned}$$