

# **7. MERENJE INDUKTIVNOSTI**

## 7.1. Uvod

- Induktivnost se meri naizmeničnim strujama, pošto se ovaj efekat javlja samo pri promenama struje.
- Induktivnost je posledica teoreme o održavanju fluksa. Fluks u kolu se ne može promeniti trenutno. Induktivnost je mera električne inercije kola.
- U električnim kolima meri se sopstvena induktivnost i međusobna induktivnost (oznaka  $M$  ili  $L_{12}$ ).
- Sopstvena induktivnost (oznaka  $L$ ) posledica je dejstva kola (kalema) i sopstvenog fluksa. Može se izraziti jednačinom:

$$L = \frac{d\Phi_s}{di}$$

- Međusobna induktivnost (oznaka  $M$  ili  $L_{12}$ ) je posledica uzajamnog dejstva dva kola (kalema) i njihovog međusobnog fluksa, odnosno:

$$M = L_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{di_1} = \frac{d\Phi_{21}}{di_2}$$

## 7.1. Uvod

- Kod merenja induktivnosti problem može da bude uticaj materijala (sredine).
- Kola sa feromagnetnim materijalima su nelinearna i induktivnost je u tom slučaju nelinearna funkcija struje zbog karakteristike magnećenja:

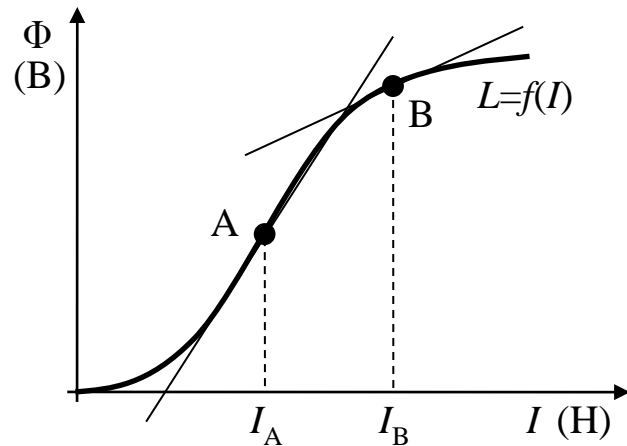
$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \mu \cdot \vec{H} \cdot d\vec{S}, \quad \mu = \begin{cases} \mu_o & - \text{nemagnetna sredina} \\ \mu_o \mu_r & - \text{feromagnetna sredina} \end{cases}$$

gde je  $B$  magnetna indukcija,  $H$  je magnetno polje, a  $\mu$  je magnetna permeabilnost.

- Zbog nelinaernosti kola, kod merenja se javlja problem radne tačke.

## 7.1. Uvod

- Ovaj problem je ilustrovan na krivoj magnećenja sa slike.



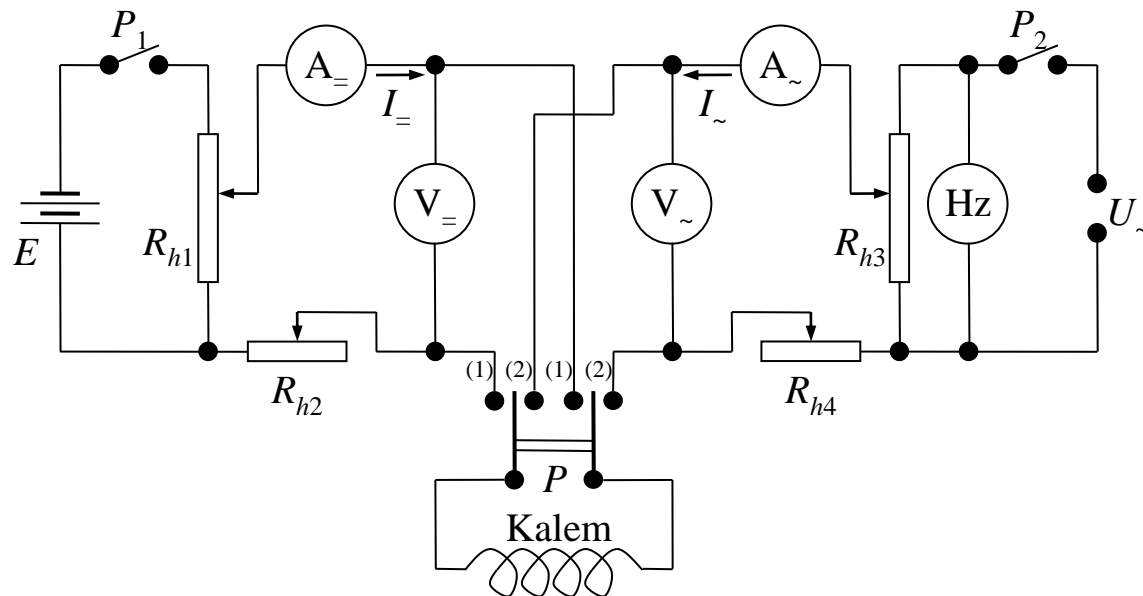
- Mogu se posmatati dve moguće radne tačke A i B.
- Pošto je  $L = d\Phi/di$  to znači da induktivnost predstavlja nagib krive magnećenja u nekoj tački.
- Sa slike se vidi da nagibi u tačkama A i B nisu isti što znači da induktivnost zavisi od radne struje.

## 7.1. Uvod

- Za merenje induktivnosti primenjuju se razne metode:
  - $U-I$  metoda;
  - $P-I$  metoda;
  - Rezonantne metode;
  - Mosne metode;
  - Metode zasnovane na merenju fluksa.
- Prvo će se obraditi metode za merenje sopstvene induktivnosti, a zatim i metode za merenje međusobne induktivnosti.

## 7.2. Merenje sopstvene induktivnosti $U-I$ metodom

- Ova metoda se prvenstveno koristi za merenje induktivnosti kalemova bez gvožđa.
- Za slučaj nižih frekvencija (50, 60 Hz) metoda može poslužiti i za merenje induktivnosti kalemova sa gvožđem. Međutim, merenjem se tada dobijaju približne, orientacione vrednosti.
- Šema je data na slici.



## 7.2. Merenje sopstvene induktivnosti $U-I$ metodom

- U položaju prebacača (1) kolo se napaja jednosmernom strujom. Meri se otpor namotaja kalema  $U-I$  metodom.
- Meri se omska otpornost:

$$R = \frac{U_{=}}{I_{=}}$$

- U položaju prebacača (2) kolo se napaja naizmjeničnom strujom.
- Primenom  $U-I$  metode meri se impedansa kalema:

$$Z = \frac{U_{\sim}}{I_{\sim}}$$

- U ovom položaju prebacača meri se i frekvencija napona napajanja  $f$ .
- Na osnovu ovih merenja može se izračunati induktivnost preko izraza:

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U_{\sim}}{I_{\sim}}\right)^2 - \left(\frac{U_{=}}{I_{=}}\right)^2}$$

## 7.2. Merenje sopstvene induktivnosti $U-I$ metodom

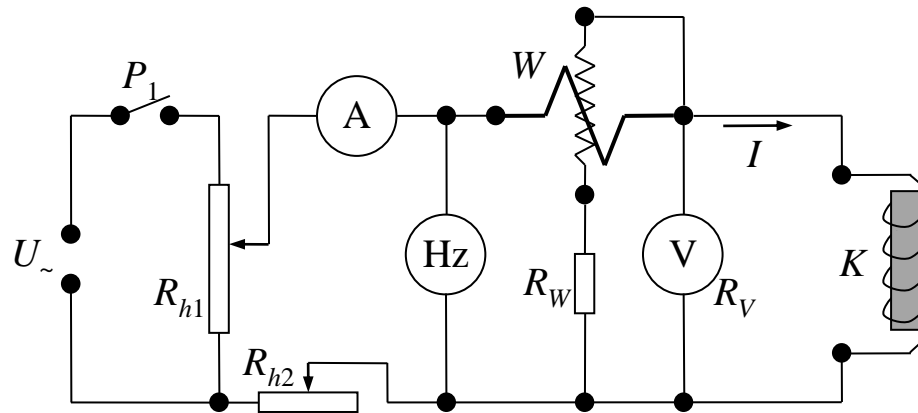
- Potrebno je reći da je omski otpor meren pri jednosmernoj struji praktično jednak aktivnom otporu pri naizmeničnoj struji zbog zanemarenja uticaja skin efekta (učestanost je mala).
- Za velike učestanosti to nije slučaj.

### 7.3. Merenje sopstvene induktivnosti kalema sa gvoždem ( $P-I$ metoda)

- Kada kalem ima feromagnetno jezgro primena prethodne metode može dovesti do pogrešnih rezultata.
- To je posledica razlike vrednosti omskog otpora dobijenog merenjem jednosmernom strujom  $R_{\sim}$  i aktivnog otpora merenog naizmeničnom strujom  $R_{\sim}$  zbog značajnog uticaja feromagnetnog materijala (gvožđa).
- U gvožđu postoje gubici usled histerezisa i vrtložnih struja.
- Posledica toga je da je efektivna vrednost otpornosti kalema veća nego pri merenju jednosmernom strujom.

### 7.3. Merenje sopstvene induktivnosti kalema sa gvoždem (*P-I* metoda)

- Šema za ovu metodu data je na slici.



- Merenjem snage vatmetrom može se dobiti aktivna otpornost (efektivna otpornost):

$$P_W = R_e I^2 \rightarrow R_e = \frac{P_W}{I^2}$$

- Impedansa kalema dobija se merenjem napona i struje:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R_e^2 + (\omega L)^2}$$

### 7.3. Merenje sopstvene induktivnosti kalema sa gvoždem (*P–I* metoda)

- Pošto se meri i frekvencija nepoznata induktivnost može se dobiti preko izraza:

$$L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{Z^2 - R_e^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{P_W}{I^2}\right)^2}$$

odnosno

$$L = \frac{1}{2\pi f I^2} \sqrt{U^2 I^2 - P_W^2} \quad (*)$$

- Kod ove metode merenje se može vršiti za razne vrednosti struje i tako dobiti karakteristika  $L = f(I)$ .

### 7.3. Merenje sopstvene induktivnosti kalema sa gvoždem (*P–I* metoda)

- Pri merenju se može uzeti u obzir i unutrašnja potrošnja naponskih kola vatmetra i voltmetra. Tada je snaga gubitaka u kalemu:

$$P_e = P_W - \frac{U^2}{R_W} - \frac{U^2}{R_V}$$

gde je  $R_W$  unutrašnji otpor vatmetra, a  $R_V$  unutrašnji otpor voltmetra.

- Ova snaga određuje aktivnu otpornost kalema.
- Ta aktivna otpornost naziva se i „efektivna vrednost” i može se izračunati preko izraza:

$$R_e = \frac{P_e}{I^2}$$

## 7.3. Merenje sopstvene induktivnosti kalema sa gvoždem (*P–I* metoda)

- Kod što je već rečeno razlika u aktivnoj otpornosti je posledica skin efekta i gubitaka u gvožđu koji se manifestuju kao povećanje otpornosti kalema.
- Ako se uzme da je prividna snaga kalema:

$$S = U \cdot I$$

tada je

$$\sqrt{U^2 I^2 - P_w^2} = \sqrt{Q^2} = Q$$

- Kombinovanjem poslednje jedanačine sa jednačinom (\*) dobija se:

$$L = \frac{1}{2\pi f I^2} Q$$

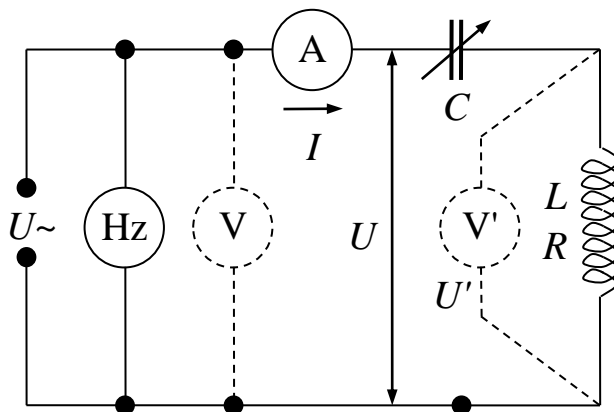
- Iz prethodne jednačine se vidi da se induktivnost, teorijski, može meriti i varmetrom.
- To se u praksi ne radi, ali se vidi da je reaktivna snaga funkcija induktivnosti i učestanosti.

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Poznato je da u kolima naizmjenične struje koja u sebi sadrže induktivnosti i kapacitivnosti može da se javi rezonansa.
- Rezonansa nastaje kada se izjednači pad napona na induktivnostima sa padom napona na kapacitivnostima u kolu.
- Ova metoda se koristi za merenje sopstvene induktivnosti kalemova bez gvožđa.
- Pošto postoji samo jedna vrednost rezonante struje bilo bi teško kolo dovesti u rezonansu ako bi induktivnost bila nelinearna funkcija struje kao što je slučaj u kolima sa feromagnetnim materijalima.
- U principu mogu se koristiti dve šeme u kojima se javlja rezonansa:
  - redna veza  $L$  i  $C$  – naponka rezonansa,
  - paralelna veza  $L$  i  $C$  – strujna rezonansa.

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Na slici je data šema za metodu naponske (redne) rezonanse.



- Osnovni elementi šeme su:
  - izvor napajanja,
  - frekvencmetar, meri frekvenciju napona napajanja,
  - ampermetar, meri struju u kolu,
  - kapacitet i kalem,
  - voltmetri  $V$  i  $V'$ .

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Potrebno je naglasiti da voltmetri u šemi nisu neophodni. Oni služe za proveru vrednosti faktora povišenja napona.
- Impedansa kola sa slike je:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- Modul ove impedanse je:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- Struja koju meri ampermetar je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Ako se u kolu ostvari rezonansa tada važi da je:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \text{ odnosno } \omega^2 LC = 1$$

- Pri rezonansi impedansa kola je minimalna:

$$Z = Z_{\min} = R$$

dok je struja kroz kolo maksimalna:

$$I = I_{\max} = \frac{U}{R}$$

- Postoje tri mogućnosti za realizaciju rezonanse:
  - promena frekvencije napajanja  $f$ ,
  - promena induktivnosti  $L$  (konstruktivno nije pogodno),
  - promena kapaciteta  $C$  (najpogodnije).

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Očigledno je da ako su poznate dve veličine, treća se može izračunati.
- Za merenje induktivnosti najpogodnije je da se menja kapacitet  $C$ .
- Lakše je realizovati promenljiv kapacitet ili više njih, zbog promene opsega merenja, nego izvor promenljive frekvencije u širokom opsegu.
- U postupku merenja menja se kapacitet  $C$  dok se ne dobije maksimalna vrednost struje  $I_{max}$  koja se konstatuje na ampermetru.
- Tada se iz uslova rezonanse može odrediti nepoznata induktivnost:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2\pi f)^2 C}$$

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Pri rezonansi mogu se javiti visoki naponi na kapacitetu i induktivnosti, koji mogu biti znatno veći od napona napajanja i mogu dovesti do proboja izolacije.
- Može se definisati faktor povišenja napona:

$$k = \frac{U'}{U}$$

gde je  $U'$  napon na induktivnosti, a  $U$  napon napajanja.

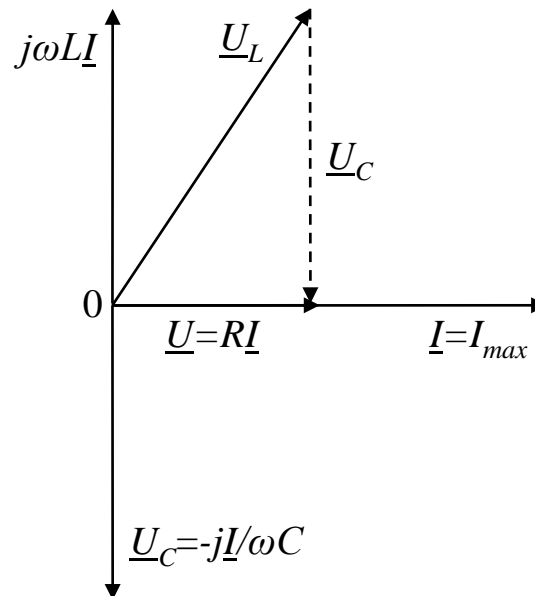
## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Za kolo sa slike može se napisati fazorska jednačina:

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$$

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}.$$

- Na osnovu prethodnih jednačina može se nacrtati vektorski dijagram prikazan na slici.



## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Potrebno je reći da pri rezonansi uvek važi da je  $|\underline{U}_L| > |\underline{U}_C|$  zbog toga što kalem nije nikada idealan i ima uvek neki aktivni otpor.
- Pri rezonansi reaktivne komponente padova napona su jednake, odnosno:

$$|j\omega L \underline{I}| = \left| j \frac{\underline{I}}{\omega C} \right|$$

- Ove komponente mogu biti znatno veće od napona napajanja.
- Pošto se one poništavaju, gledano sa strane izvora one se ne oseće.
- Ipak, ti naponi fizički postoje i mogu oštetiti izolaciju.
- Napon na iduktivnosti je:

$$\underline{U}_L = (R + j\omega L)\underline{I} = \underline{Z}_L \underline{I}$$

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Pošto je pri rezonansi:

$$I = I_{\max} = \frac{U}{R}$$

za efektivnu maksimalnu vrednost napona na induktivnosti dobija se:

$$U_{L\max} = U' = I_{\max} Z_L = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$U_{L\max} = U \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}.$$

- Faktor povećanja sada je:

$$k_U = \frac{U'}{U} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} = \sqrt{1 + Q^2}$$

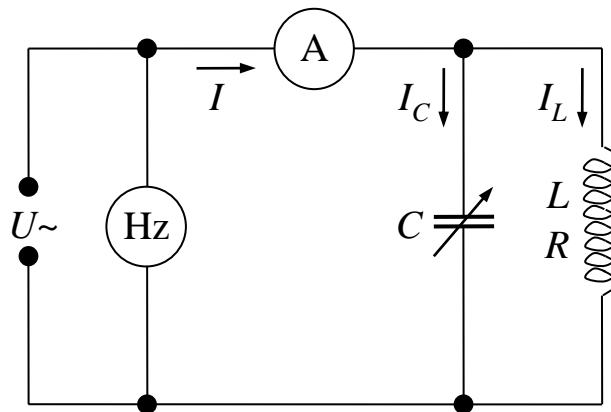
gde je  $Q$  faktor dobrote kalema ( $Q = \omega L/R$ ).

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Vidi se da je faktor  $k_U$  veći od jedan i da može imati velike vrednosti.
- Velike vrednosti su karakteristične za kalemove sa gvožđem, zbog velikog  $L$ .
- Važno je reći da izolaciju ugrožavaju trenutne vrednosti električnog polja.
- Trenutne vrednosti električnog polja su direktno proporcionalne trenutnoj vrednosti napona.
- Za sinusoidalne napone to znači da  $U_{Lmax}$  treba pomnožiti sa  $\sqrt{2}$  .

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Na slici je data šema za metodu strujne (paralelne) rezonanse.



- Osnovni elementi šeme su:
  - izvor napajanja,
  - frekvencmetar za merenje učestanosti,
  - ampermetar za merenje struje,
  - kapacitet i merni kalem.

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Za razliku od naponske rezonanse kriterijum za strujnu rezonansu je minimalna struja u kolu.
- U opštem slučaju, struja u kolu je:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}$$

gde je  $\underline{Y}$  admintansa kola koja je jednaka:

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

- Kada se prethodni izraz sredi dobija se:

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \frac{R^2 C + \omega^2 L^2 C - L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

- Efektivna vrednost struje u kolu je sada:

$$I = Y \cdot U = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 (R^2 C + \omega^2 L^2 C - L)^2}}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot U$$

## 7.4. Merenje sopstvene induktivnosti rezonantnom metodom

- Iz prethodnog izraza se vidi da je struja minimalna kada je:

$$R^2C + \omega^2 L^2 C - L = 0, \text{ odnosno } L(1 - \omega^2 LC) = R^2C.$$

- Ovo je kvadratna jednačina po  $L$ . Uzima se pozitivno rešenje jednačine.
- Minimalna vrednost struje je sada:

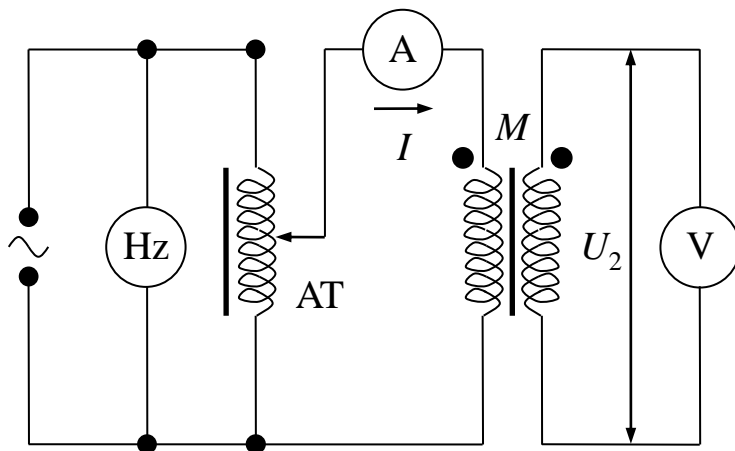
$$I_{\min} = U \cdot \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} = U \cdot \frac{R}{R^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega L}{R} \right)^2 \right]} = U \cdot \frac{1}{R(1 + Q^2)}$$

gde je  $Q$  faktor dobrote kalema ( $Q = \omega L/R$ ).

- I u slučaju redne rezonanse može se izmeriti bilo koji od tri parametra ako su druga dva poznata.
- Strujnom rezonansom može se meriti i induktivnost, ali je postupak proračuna složeniji (kvadratna jednačina) pa se ređe primenjuje u praksi.

## 7.5. Merenje međusobne induktivnosti $U-I$ metodom

- Šema veza za merenje međusobne induktivnosti pomoću ampermetra i voltmetra ( $U-I$  metoda) data je na slici.



- Šema sadrži sledeće elemente:
  - AT – autotransformator,
  - $M$  – međusobna induktivnost koja se meri,
  - V – voltmetar, poželjno sa što većom ulaznom impedansom,
  - A – ampermetar za merenje struje,
  - Hz – frekvencmetar za merenje učestanosti.

## 7.5. Merenje međusobne induktivnosti $U-I$ metodom

- Elektromotorna sila indukovana na sekundaru međusobne induktivnosti je:

$$e_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

gde je  $\Phi_{12}$  međusobni fluks primara i sekundara, a  $i_1$  struja primara.

- Za sinusoidnu struju:

$$i_1 = I_{1m} \sin \omega t$$

dobija se:

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} = -M\omega I_{1m} \cos \omega t = -E_{2m} \cos \omega t = -E_{2m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

gde je  $E_{2m}$  maksimalna vrednost elektromotorne sile indukovane u sekundaru.

## 7.5. Merenje međusobne induktivnosti $U-I$ metodom

- Instrumenti mere efektivne vrednosti struje i napona, tako da je:

$$E_2 = \omega MI$$

- Za voltmetar sa velikom ulaznom impedansom ( $Z_V \rightarrow \infty$ ) važi da je:

$$U_2 \cong E_2 = \omega MI$$

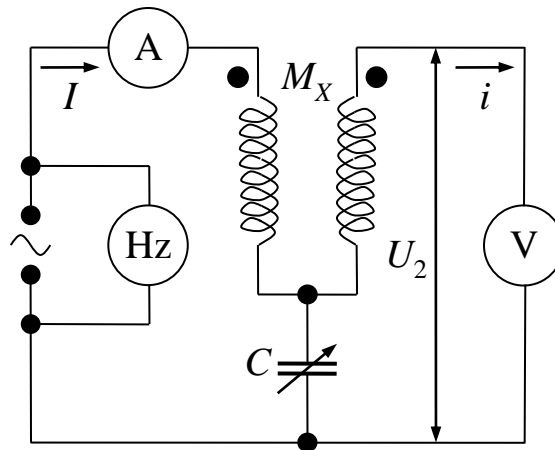
tako da je međusobna induktivnost:

$$M = \frac{U_2}{\omega I} = \frac{U_2}{2\pi f I}$$

- Metoda se može primeniti za kalemове sa i bez magnetnog jezgra.
- Može se menjati struja i tako snimiti karakteristika  $M = f(I)$ .

## 7.6. Merenje međusobne induktivnosti Kembelovom metodom

- Šema za ovu metodu data je na slici.



- Šema sadrži sledeće elemente:
  - $M_x$  – međusobna induktivnost,
  - A – ampermetar, meri struju napajanja šeme,
  - V – nulti indikator (može i ampermetar),
  - C – promenljiv kapacitet.

## 7.6. Merenje međusobne induktivnosti Kembelovom metodom

- Ovo je opoziciona ali i rezonantna metoda.
- Podešavanjem kapaciteta  $C$  ostvaruje se da u sekundarnom kolu ne protiče struja ( $i = 0$ ) ili da napon  $U_2$  bude jednak 0.
- Za veličine na sekundaru tada važi

$$\underline{U}_2 = j\omega M_X \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = 0$$

$$j\omega M_X \underline{I} = \frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

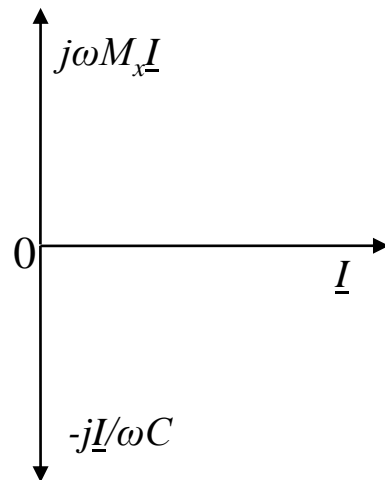
$$\omega M_X = \frac{1}{\omega C}$$

- Nepoznata međusobna induktivnost sada se može dobiti preko izraza:

$$M_X = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2\pi f)^2 C}$$

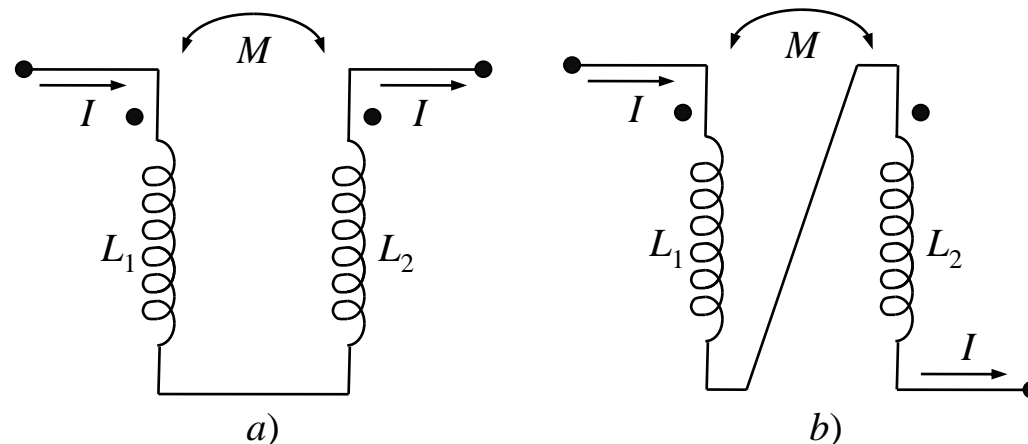
## 7.6. Merenje međusobne induktivnosti Kembelovom metodom

- Vektorski dijagram veličina u sekundarnom kolu prikazan je na slici.



## 7.7. Merenje međusobne induktivnosti metodama za merenje sopstvene induktivnosti

- Međusobna induktivnost se može meriti i metodama za merenje sopstvene induktivnosti.
- U tom slučaju moraju se izvršiti dva merenja.
- Kod prvog merenja namotaji međusobne induktivnosti se vežu na red, tako da se njihovi fluksevi oduzimaju.
- U drugom merenju namotaji međusobne induktivnosti se vežu na red ali tako da se njihovi fluksevi sabiraju.
- Šeme veza za obe kombinacije vezivanja date su na slici.



## 7.7. Merenje međusobne induktivnosti metodama za merenje sopstvene induktivnosti

- Kod šeme *a*) fluksevi se oduzimaju i merenjem se dobija induktivnost:

$$L_a = L_1 + L_2 - 2M$$

- Kod šeme *b*) fluksevi se sabiraju i merenjem se dobija induktivnost:

$$L_b = L_1 + L_2 + 2M$$

- Oduzimanjem jednačina i sređivanjem dobija se međusobna induktivnost:

$$M = \frac{L_b - L_a}{4}$$