

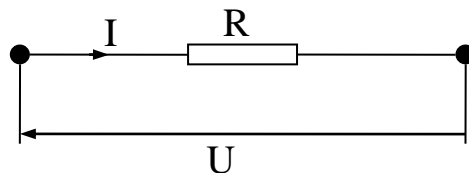
6. MERENJE ELEKTRIČNOG OTPORA

6.1. Uvod

- U ovoj sekciji obradiće se metode za merenje električnog otpora (u daljem tekstu otpor) pri jednosmernoj struji, odnosno omskog otpora.
- Potrebno je naglasiti da se električna otpornost nekog elementa pri jednosmernoj i naizmjeničnoj struji razlikuje.
- Otpor pri naizmjeničnoj struji je veći zbog skin efekta i efekta blizine koji se javljaju pri proticanju naizmjenične struje.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje (U – I metoda)

- Ova metoda spada u indirektne metode.
- Zasnovana je na primeni Omovog zakona. Ilustracija je data na slici.



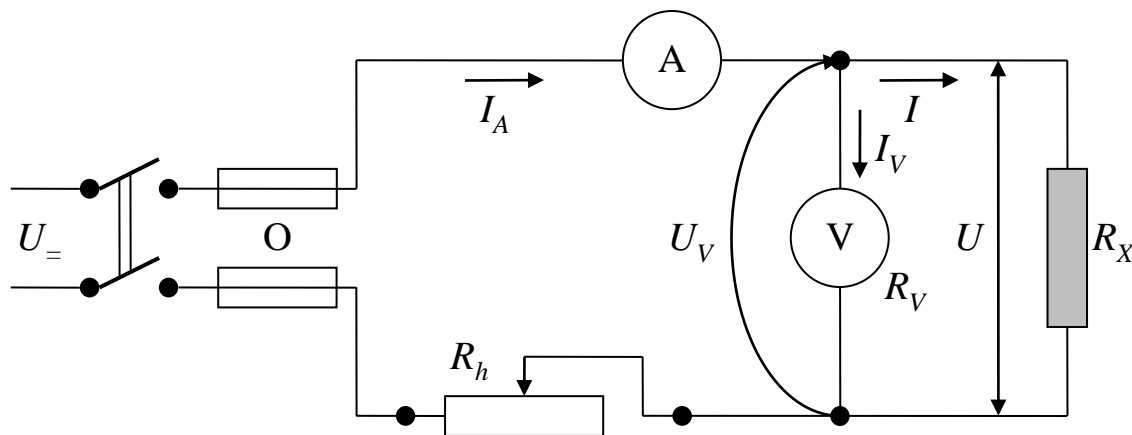
- Merenjem napona na otporu U i struje kroz njega I , otpornost se može dobiti preko jednostavnog izraza:

$$R = \frac{U}{I}$$

- Metoda je vrlo jednostavna.
- Od opreme u principu je potreban jedan ampermetar i jedan voltmetar.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje ($U-I$ metoda)

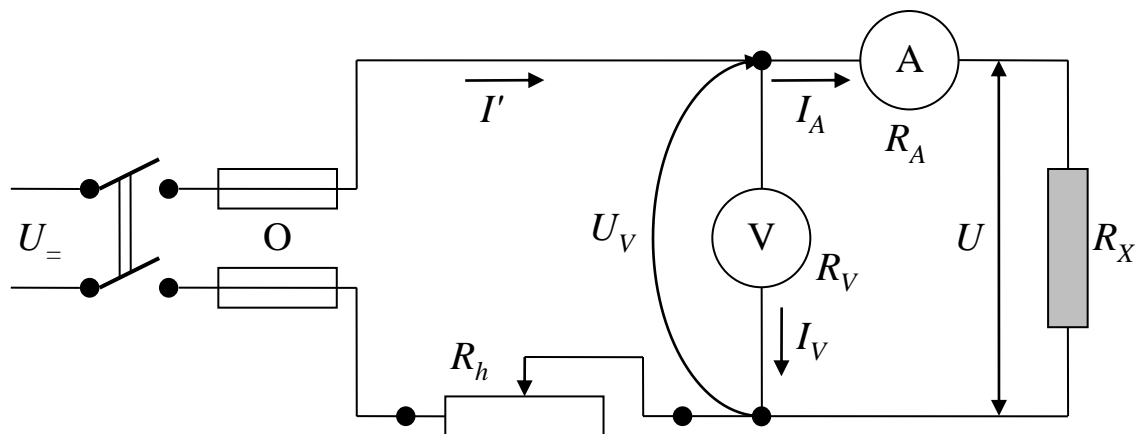
- Postoje dve moguće merne šeme. Šeme se razlikuju po međusobnom položaju ampermetra, voltmetra i mernog otpora.
- Ova metoda je takva da obe šeme imaju sistematsku grešku. Prva moguća šema (šema a) data je na slici.



- U ovoj šemi ampermetar je ispred voltmetra i sistematska greška metode je posledica unutrašnje potrošnje voltmetra.
- Ampermetar ne meri struju nepoznatog otpora već meri zbir struja kroz voltmetar i nepoznati otpor R_X .

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje (U – I metoda)

- Druga moguća šema (šema b) data je na slici.



- U ovoj šemi ampermetar je bliži mernom otporu, pa voltmetar ne meri napon na nepoznatom otporu već meri zbir pada napona na ampermetru i mernom otporu.
- To je uzrok sistematske greške ove metode.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje (U – I metoda)

- Generalno, za obe šeme, vrednost otpora koja se dobija na osnovu pokazivanja instrumenata može se dobiti preko izraza:

$$R'_X = \frac{U_V}{I_A}$$

gde je: U_V napon koji meri voltmetar, a I_A struja koju meri ampermetar.

- Ova vrednost je približna vrednost zbog sistematske greške metode.
- Međutim, iz obe šeme se može odrediti i tačna vrednost.
- Za šemu a tačna vrednost merenog otpora je:

$$R_X = \frac{U}{I}$$

gde je: U napon na nepoznatom otporu, a I struja kroz nepoznat otpor.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje ($U-I$ metoda)

- Prema šemi a važe sledeći izrazi:

$$U = U_V$$

$$I = I_A - I_V$$

$$I_V = \frac{U_V}{R_V}$$

- Kombinovanjem prethodnih izraza za izrazom može se dobiti izraz za tačnu vrednost nepoznatog otpora.

$$R_X = \frac{U_V}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}$$

gde je R_V unutrašnji otpor voltmetra.

- Očigledno je da se tačna vrednost otpora može lako odrediti na osnovu pokazivanja instrumenata, ali treba poznavati unutrašnji otpor voltmetra.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje (U – I metoda)

- Ako se dodatno analizira izraz za približnu vrednost otpora dobija se:

$$R'_X = \frac{U_V}{I_A} = \frac{U_V}{I + I_V} = \frac{1}{\frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_V}} = \frac{R_X R_V}{R_X + R_V}$$

- Ovo praktično znači da je približna vrednost otpora jednaka otporu paralele koju čine voltmetar i nepoznati otpor.
- Apsolutna greška koja se čini ako se ne uvaži korekcija je:

$$\Delta R = R'_X - R_X$$

$$\Delta R = \frac{R_X R_V}{R_X + R_V} - R_X = \frac{R_X R_V - R_X^2 - R_X R_V}{R_X + R_V} = \frac{-R_X^2}{R_X + R_V}$$

- Apsolutna greška je uvek negativna pošto je otpor paralele uvek manji od pojedinačnih otpora u njoj.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje ($U-I$ metoda)

- Relativna greška se može izračunati preko izraza:

$$\frac{\Delta R}{R_X} = \frac{-R_X}{R_X + R_V}$$

- Posmatranjem poslednja dva izraza može se uočiti da apsolutna i relativna greška opadaju sa porastom unutrašnjeg otpora voltmetra.
- Na primer ako se želi da greška bude manja od 0.1% mora biti ispunjen uslov:

$$R_V \geq 1000R_X$$

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje (U – I metoda)

- Ista ova analiza može se uraditi i za šemu b .
- Za šemu b tačna vrednost merenog otpora je:

$$R_X = \frac{U}{I_A}$$

- Za napon na merenom otporu na osnovu veličina sa šeme b dobija se:

$$U = U_V - R_A I_A$$

- Kombinovanjem poslednja dva izraza dobija se tačna vrednost merenog otpora:

$$R_X = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A = R'_X - R_A$$

- Približna vrednost merenog otpora u ovom slučaju je:

$$R'_X = R_X + R_A$$

- Ova vrednost je u stvari ekvivalentni otpor redne veze ampermetra i nepoznatog otpora.

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje ($U-I$ metoda)

- Apsolutna greška koja se čini ako se ne uvaži korekcija je:

$$\Delta R_X = R'_X - R_X = R_A$$

- Iz poslednjeg izraza se vidi da je apsolutna greška uvek pozitivna.
Relativna greška je:

$$\frac{\Delta R}{R_X} = \frac{R_A}{R_X}$$

- Vidi se da relativna greška opada sa smanjenjem otpora ampermetra.
- Na primer ako se želi da greška bude manja od 0.1% mora biti ispunjen uslov:

$$R_A \leq \frac{R_X}{1000}$$

6.1.1. Merenje otpora merenjem napona i struje ($U-I$ metoda)

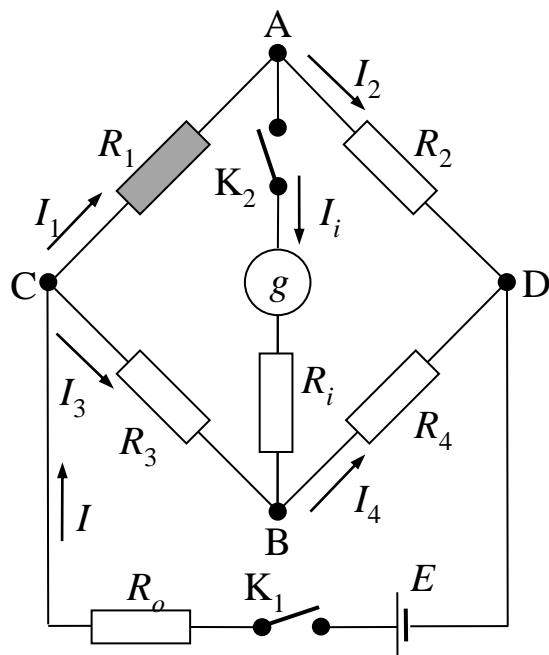
- U praksi šema a se koristi kada je $R_V \gg R_X$, odnosno za merenje malih otpora. Osim toga, unutrašnji otpor voltmetra je uvek poznat.
- Moderni digitalni voltmeri imaju veliko R_V (reda $M\Omega$).
- Šema b se koristi kada je $R_A \ll R_X$, odnosno za merenje velikih otpora.
- Nedostatak je što otpor ampermetra obično nije poznat dovoljno tačno.
- On često zavisi od merene struje.
- Najsigurnije je proceniti otpor pri maksimalnoj struji, pošto je standardna maksimalna vrednost pada napona na ampmetru pri maksimalnoj struji $U_{Amax} = 60 \text{ mV}$.

6.1.2. Merenje otpora metodom mosta

- Kod mosnih metoda merena otpornost dobija se poređenjem sa nekim drugim otporom koji je poznat.
- Za takve metode kažemo da su direktne metode.
- Mosne metode su takođe i nulte metode.
- Ove metode su jedne od napreciznijih.
- Postoji više različitih mostova za merenje otpora.
- U okviru ove sekcije obradiće se:
 - Vitstonov i
 - Tompsonov most.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Vinstonov most je već pomenut kada se analizirala opšta teorija mostova za jednosmernu struju.
- Ovde će se dati neke dodatne informacije i praktične realizacije Vinstonovog mosta.
- Opšta šema Vinstonovog mosta data je na slici.



Elementi šeme imaju sledeća značenja:

R_1 – nepoznati otpor R_X ,

R_2, R_3, R_4 – poznati otpori,

R_i – otpor u mernoj dijagonali,

R_o – unutrašnja otpornost izvora,

E – Izvor napajanja,

g – nulti indikator (galvanometar),

K_1 – prekidač koji uključuje izvor napajanja,

K_2 – prekidač koji uključuje nulti indikator mosta.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Kao što je već ranije rečeno uslov ravnoteže mosta je da napon na mernoj dijagonali bude jednak nuli, odnosno $U_{AB} = 0$.
- Alternativan uslov je da struja kroz mernu dijagonalu bude jednaka nuli, odnosno $I_i = 0$.
- Oba ova uslova se svode na isto.
- Kao što je ranije pokazano pri ravnoteži mosta važi relacija:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

- Bilo koji od četiri otpora u granama mosta može biti nepoznati otpor. Ako se pretpostavi da je R_1 nepoznati otpor onda važi:

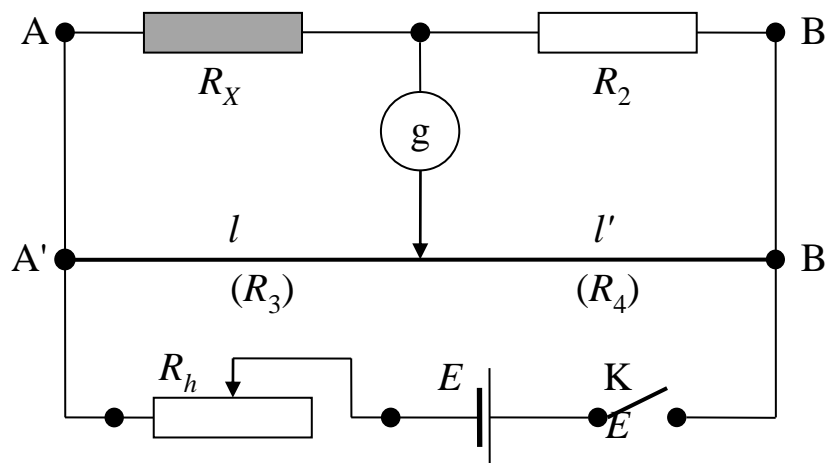
$$R_x = R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2$$

6.1.2.1. Vinstonov most

- Grana sa otporom R_2 obično se zove uporedna grana, odnosno grana za poređenje.
- Otpor R_2 je promenljiv i pomoću njega se podešava ravnoteža mosta.
- Grane sa otporima R_3 i R_4 su proporcionalne grane.
- U principu, za jedno merenje odnos ovih otpora je konstantan.
- U praksi se mogu sresti dva tipa Vinstonovog mosta:
 - žična konstrukcija mosta,
 - most sa dekadom otpora.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Žična konstrukcija mosta data je na slici. Ova konstrukcija se koristi uglavnom za industrijske potrebe.



- Proporcionalne grane (R_3 i R_4) predstavlja otporna žica sa klizačem koja se nalazi između tačaka A' i B' na slici.
- Pomeranjem klizača duž otporne žice kontinualno se menja odnos R_3/R_4 , dok je otpor R_2 konstantan.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Pošto je otporna žica konstantnog preseka važi da je:

$$\frac{R_3}{R_4} \cong \frac{l}{l'}, \quad (l + l' = \text{const})$$

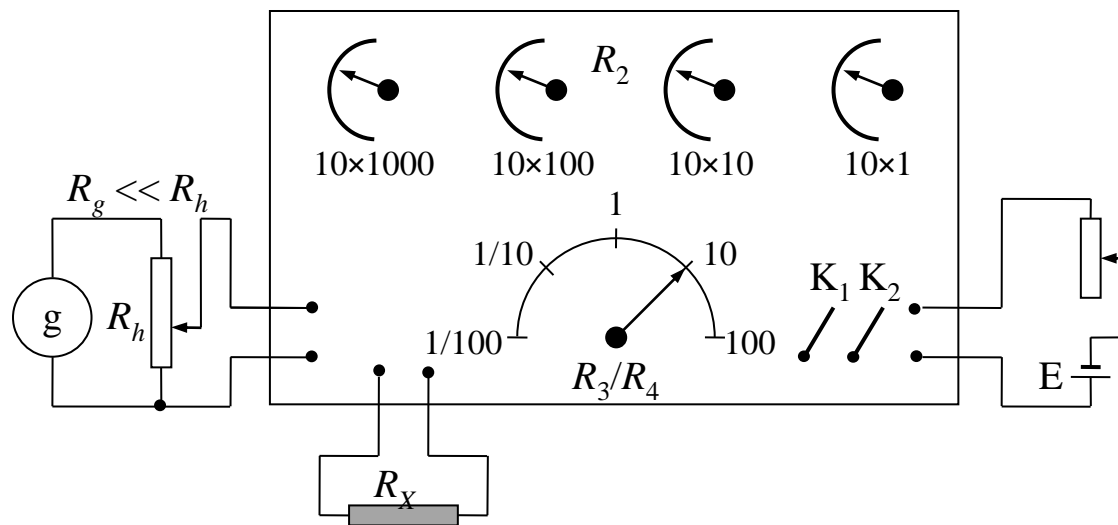
- Ovako konstruisan Vinstonov most obično se direktno baždari u Ω .
- Pomoću otpora R_2 menja se njegov opseg.
- Otpori spojnih veza AA' i BB' su zanemarivi u odnosu na otpor žice.
- Svi elementi mosta, uključujući i galvanometar su ugrađeni u isto kućište.
- Otporna žica ima veliki otpor. Tipično je od manganina i ima mali temperaturni koeficijent otpora. Tipična dužina je 1 m, a prečnik (0.5 - 1) mm.
- Konstruktivno, otporna žica je namotana kao spirala oko izolacionog torusa. Pri merenju se teži da bude zadovoljen uslov:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{l}{l'} \leq 5$$

- To znači da mereni otpor i otpor za poređenje R_2 treba da budu istog reda veličine.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Konstrukcija Vinstonovog mosta sa dekadom otpora data je na slici.



- Kod ovakve konstrukcije Vinstonovog mosta tasteri K_1 i K_2 služe za uključivanje izvora napajanja i galvanometra.
- Mereni otpor poredi se sa vrednošću otpora R_2 podešenog na dekadnoj kutiji.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Otpor za poređenje R_2 dobija se kao zbir otpora na sve 4 dekade.
- Kod nekih mostova postoji i peta dekada ($10 \times 0.1 \Omega$).
- Otpornik R_h služi za podešavanje osetljivosti galvanometra g u mernoj dijagonali mosta.
- Klizač za promenu vrednosti otpora u proporcionalnim granama mosta (podešavanje odnosa R_3/R_4) ima položaje za sledeće moguće vrednosti:

$$\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10 \text{ i } 100$$

- Nepoznati otpor dobija se po već pomenutoj formuli:

$$R_x = \left(\frac{R_3}{R_4} \right) R_2$$

- Granice (opseg) merenja procenjuju se na osnovu minimalnih i maksimalnih vrednosti otpora R_2 i odnosa R_3/R_4 koji se mogu podesiti na mostu.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Za vrednosti $R_{2\min} = 1 \Omega$ i $(R_3/R_4)_{\min} = 1/100$, dobije se minimalna vrednost otpora koja se može izmeriti mostom:

$$R_{X\min} = \left(\frac{R_3}{R_4} \right)_{\min} \cdot R_{2\min} = \frac{1}{100} \cdot 1 = 0.01 \Omega$$

- S druge strane, za vrednosti $R_{2\max} = 11110 \Omega$ i $(R_3/R_4)_{\max} = 100$ dobija se maksimalna vrednost otpora koja se može izmeriti mostom:

$$R_{X\max} = \left(\frac{R_3}{R_4} \right)_{\max} \cdot R_{2\max} = 100 \cdot 11110 = 1.111 \text{ M}\Omega$$

6.1.2.1. Vinstonov most

- Kod merenja se može desiti da se ne može ostvariti ravnoteža zbog nedovoljno fine podele na otporu R_2 koji se menja u diskretnim vrednostima.
- To znači da je ravnoteža mosta određena nekom vrednošću otpora koja se nalazi unutar granica:

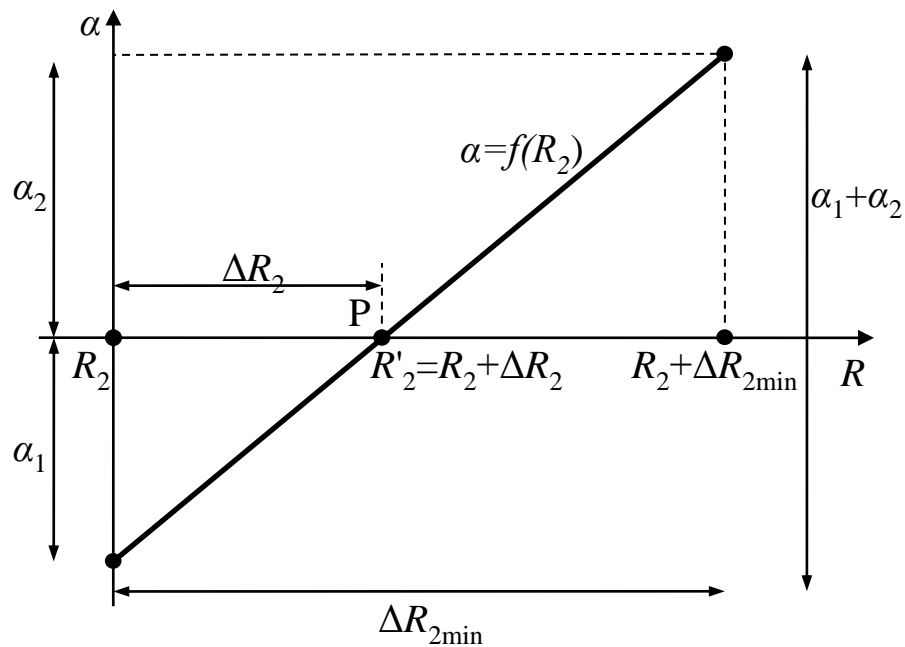
$$R_2 \leq R'_2 \leq R_2 + \Delta R_{2\min}$$

gde je $\Delta R_{2\min}$ minimalna moguća vrednost promene otpora R_2 (npr. 1Ω).

- U ovom slučaju, za vrednost otpora R_2 galvanometar skreće u jednu stranu α_1 podeljaka, a za vrednost otpora $R_2 + \Delta R_{2\min}$ galvanometar skreće u drugu stranu α_2 podeljaka.
- Ako se poznaju vrednosti R_2 i $\Delta R_{2\min}$ i ako se odrede skretanja α_1 i α_2 moguće je odrediti i tačnu vrednost nepoznatog otpora R_X .
- Može se reći da je struja kroz mernu dijagonalu mosta, za male promene otpora u nekoj grani mosta, linearna funkcija tih promena otpora.

6.1.2.1. Vinstonov most

- Grafik te promene dat je na slici.



- Na grafiku tačka P predstavlja ravnotežu mosta. Iz sličnosti trouglova sa grafika dobija se:

6.1.2.1. Vinstonov most

- Iz sličnosti trouglova sa grafika dobija se:

$$\frac{\Delta R_2}{\alpha_1} = \frac{\Delta R_{2\min}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\Delta R_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Delta R_{2\min}$$

- Otpor R'_2 koji odgovara ravnoteži mosta je:

$$R'_2 = R_2 + \Delta R_2 = R_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Delta R_{2\min}$$

- Konačno, vrednost merenog otpora je:

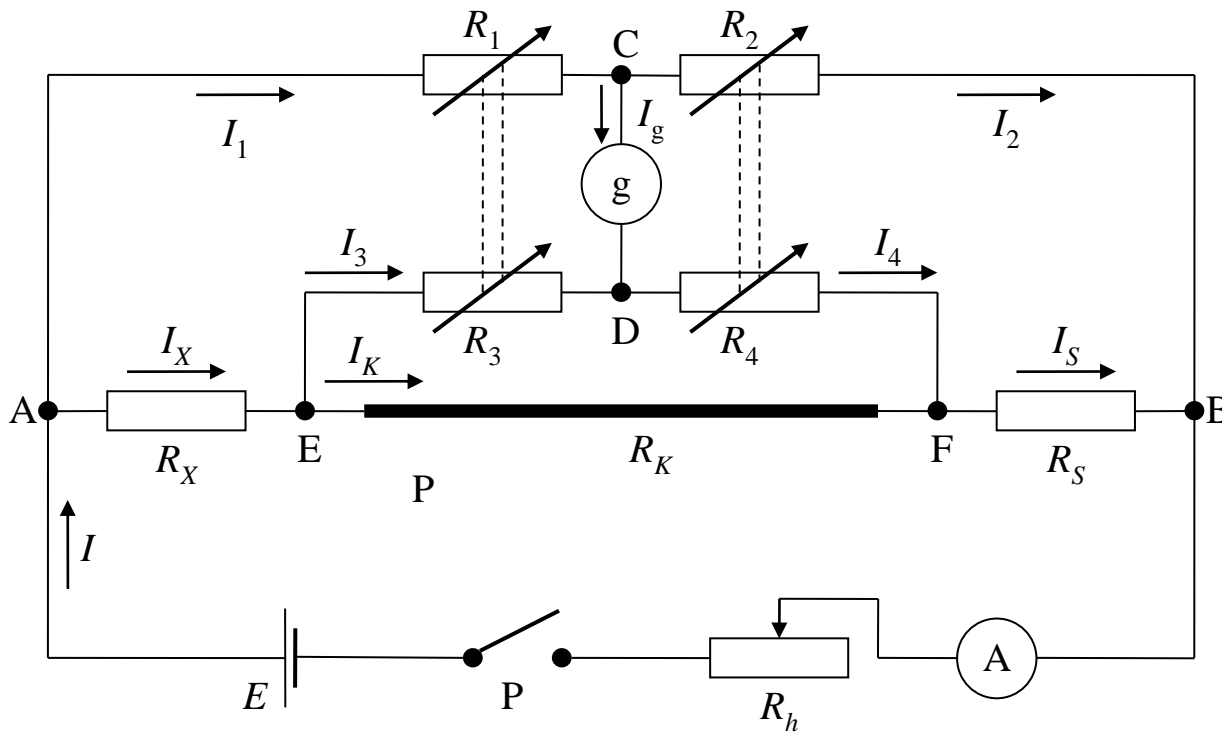
$$R_X = \frac{R_3}{R_4} R'_2 = \frac{R_3}{R_4} \left(R_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Delta R_{2\min} \right)$$

6.1.2.2. Tompsonov most

- Tomsonov most je po svojoj konstrukciji dvostruki most.
- Patentirao ga je William Thompson još 1862. godine.
- Ovaj most se prvenstveno koristi za merenje malih otpora, manjih od 1Ω .
- Thompson je uočio da se kod Vitstonovog mosta pri merenju malih otpora, javlja uticaj spojnih provodnika i kontakata.
- Njihovi otpori mogu biti reda vrednosti merenog otpora pa se tako pri merenju može napraviti velika greška.
- On je ovaj uticaj odstranio tako što je odvojio delove glavnog kola u kome je mereni otpor od delova kola u kome su grane otpora za podešavanje ravnoteže.

6.1.2.2. Tompsonov most

- Šema Tompsonovog mosta data je na slici.



6.1.2.2. Tompsonov most

- Kroz mernu granu sa nepoznatim otporom R_X prolazi struja I_X .
- Ova struja treba da je veća što su otpori R_X manji da bi se dobili dovoljno veliki padovi napona na njima, zbog veće osetljivosti.
- Suština je da kroz male otpore (R_X, R_K, R_S) protiče najveći deo struje, a padovi napona sa njih se dovode na deo za uravnoteženje (R_1, R_2, R_3, R_4), gde se uravnotežavaju padovi napona na nepoznatom otporu R_X i otporu etalonu R_S .
- Uslov ravnoteže mosta se da struja kroz galvanometar bude jednaka nuli ($I_g = 0$).
- Alternativan uslov je da napon na grani sa galvanometrom bude jednak nuli ($U_g = 0$).
- Oba uslova se svode na isto.

6.1.2.2. Tompsonov most

- Pri ravnoteži mosta, nakon izvođenja, dobija se izraz za nepoznati otpor:

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} R_S + \frac{R_K}{R_2} \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_3 + R_4 + R_K}$$

- Očigledno je da je izraz nepoznati otpor veoma složen.
- Na nepoznati otpor utiče i otpor povezne grane (R_K).
- Međutim, postoji način kako da se ovaj uticaj eliminiše.
- Provodnik koji povezuje tačke E i F (otpor R_K) treba da je što manjeg otpora, da praktično teži 0.
- To se postiže upotrebom što kraćeg provodnika, što većeg preseka.
- Pored toga, u praksi se mostovi prave tako da se konstruktivno realizuje uslov da je:

$$R_1 = R_3 \quad \text{i} \quad R_2 = R_4$$

6.1.2.2. Tompsonov most

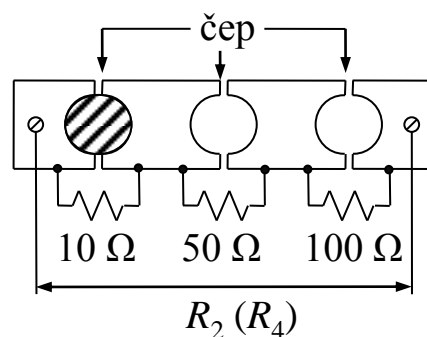
- U tom slučaju, član koji se pojavljuje u drugom delu izraza za nepoznati otpor $R_1 \cdot R_4 - R_2 \cdot R_3$ jednak je 0, pa je i ceo drugi deo izraza jednak 0.
- Sada se nepoznati otpor može izračunati preko izraza:

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} R_S = \frac{R_3}{R_4} R_S$$

- U praksi, obično su otpori R_2 i R_4 u toku merenja konstantni i jednaki, a menjaju se otpori R_1 i R_3 .
- Otpori R_1 i R_3 su izvedeni kao dekade sa mehanički spregnutim ručicama, tako da se mogu menjati, a da pri tome imaju istu vrednost.
- Otpori R_2 i R_4 se obično realizuju tako da mogu imati više vrednosti zbog promene opsega, ali su u toku merenja konstantni.

6.1.2.2. Tompsonov most

- Tipično rešenje je za podešavanje vrednosti otpora R_2 i R_4 dato je na slici.



- Prema vrednostima sa slike otpore R_2 i R_4 moguće je podesiti na sledeće vrednosti: 10, 50, 60 (10+50), 100, 110 (100+10), 150 (50+100), 160 (10+50+100).
- Dekadne kutije R_1 i R_3 u praktičnoj realizaciji su obično četvorocifrene ($9 \times 100 + 9 \times 10 + 9 \times 1 + 9 \times 0.1$) Ω pa je:

$$R_{1\max} = 999.9\ \Omega, \text{ a } R_{1\min} = 0.1\ \Omega$$

6.1.2.2. Tompsonov most

- Pri merenjima treba birati vrednosti R_2 odnosno R_4 tako da se na mostu mogu iskoristiti sve 4 vrednosti na dekadama R_1 i R_3 , zbog tačnosti.
- Pri merenjima postoje dve mogućnosti.
- Prva je kada je mereni otpor veći od otpora etalona, odnosno $R_X > R_S$.
- Za ovaj slučaj koristi se šema veza data na slici. Tada je:

$$\frac{R_X}{R_S} = \frac{R_1}{R_2} > 1$$

pa se mogu postaviti vrednosti za R_2 takve da se R_1 može podešavati na sve četiri dekade čime se postiže najveća tačnost.

6.1.2.2. Tompsonov most

- Druga mogućnost je da mereni otpor bude manji od otpora etalona, odnosno $R_X < R_S$. Tada je:

$$\frac{R_X}{R_S} = \frac{R_1}{R_2} < 1$$

pa se ne može realizovati merenje u kome se na dekadi R_1 koriste sve četiri cifre.

- U tom slučaju otpori R_X i R_S zamenjuju mesta u šemi.
- Postupak merenja je sada isti kao za prvi slučaj. Nepoznati otpor se dobija iz izraza:

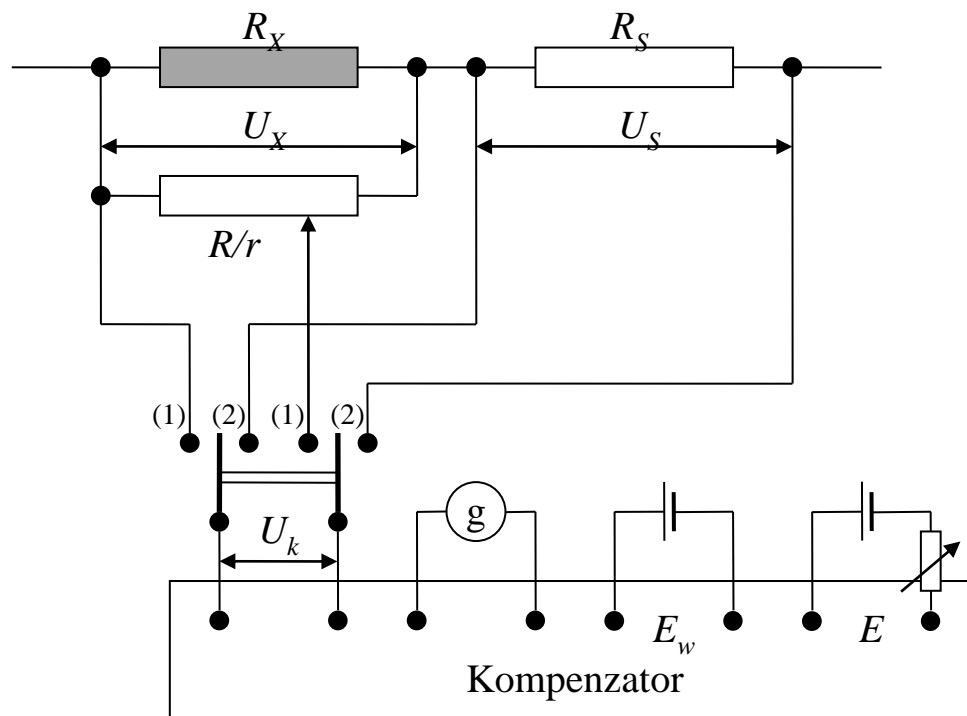
$$R_X = \frac{R_2}{R_1} R_S$$

pa se mogu ostariti ravnoteža mosta pri velikim vrednostima otpora R_1 , čime se postiže i najveća moguća tačnost merenja.

- Opseg merenja kod Tompsonovog mosta je $(10^{-6} \div 10^{-1}) \Omega$.

6.1.3. Merenje otpora pomoću kompenzatora

- Šema veza za merenje otpora kompenzatorom data je na slici.



6.1.3. Merenje otpora pomoću kompenzatora

- Kompenzator je na slici predstavljen samo simbolički. Puna šema je ranije data.
- Za merenje otpora formira se pomoćno kolo koje sadrži dva redno vezana otpornika.
- Prvi otpornik je R_X i njegov otpor se meri.
- Drugi je etalon otpornik R_S koji služi za merenje struje tako što se kompenzatorom meri pad napona na njemu, na osnovu kojeg se određuje vrednost struje.
- U opštem slučaju, mereni napon je veći od napona koji se može izmeriti kompenzatorom, pa se mora upotrebiti delitelj napona (R/r).

6.1.3. Merenje otpora pomoću kompenzatora

- Postupak merenja se vrši u dve faze.
- U položaju prebacača (2) meri se pad napona U_S na poznatom otporniku R_S i dobija se struja:

$$I = \frac{U_S}{R_S}$$

- U položaju prebacača (1) meri se pad napona U_X na nepoznatom otporniku R_X . Na kompenzatoru se meri napon U_k , a preko delitelja napona odnosa deljenja (R/r) dobija se napon U_X koji je na otporu R_X :

$$\frac{U_X}{U_k} = \left(\frac{R}{r} \right)$$

$$U_X = \left(\frac{R}{r} \right) U_k$$

6.1.3. Merenje otpora pomoću kompenzatora

- Sada se može izračunati nepoznati otpor:

$$R'_X = \frac{U_X}{I} = \left(\frac{R}{r}\right) \cdot U_k \cdot \frac{1}{\frac{U_S}{R_S}},$$

$$R'_X = \left(\frac{R}{r}\right) \cdot R_S \cdot \frac{U_k}{U_S}.$$

- Ovo je samo merena vrednost otpora, zbog sistematske greške koju unosi delilo napona koje je vezano paralelno mernom otporu R_X .
- Prema tome, potrebno je odrediti tačnu vrednost otpora.
- Mereni napon U_X odgovara paralelnoj vezi merenog otpora R_X i delila napona.
- Iz šeme se dobija da je:

$$U_X = \frac{R_X R}{R_X + R} I \quad (*)$$

6.1.3. Merenje otpora pomoću kompenzatora

- Na kompenzatoru su izmerene vrednosti:

$$U_X = \left(\frac{R}{r}\right)U_k \quad I = \frac{U_S}{R_S}$$

- Kada se poslednje dve jednačine uvrste u jednačinu (*) dobija se:

$$\left(\frac{R}{r}\right)U_k = \frac{R_X R}{R_X + R} \frac{U_S}{R_S}$$

- Sređivanjem poslednje jednačine dobija se izraz za tačnu vrednost merenog otpora:

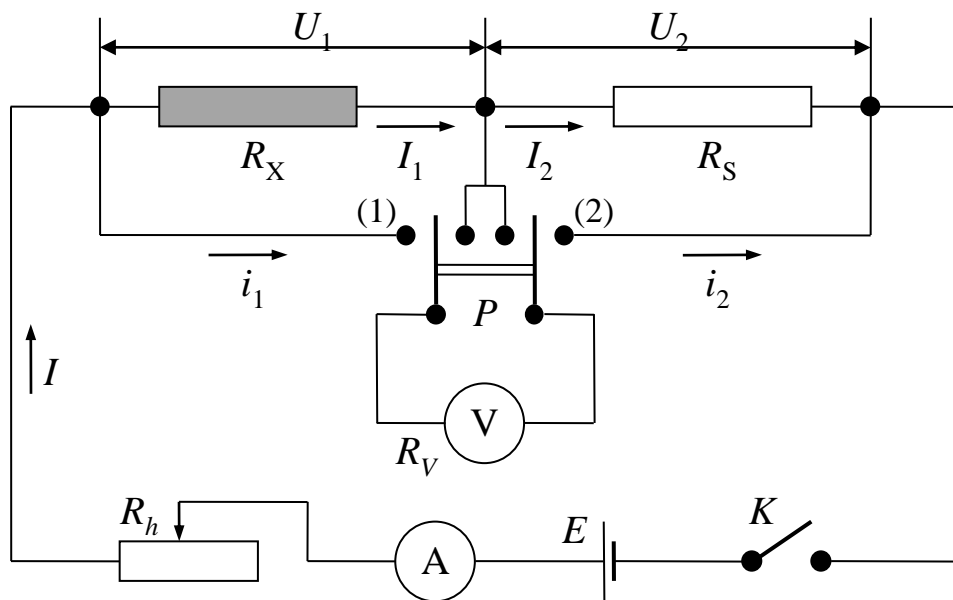
$$R_X = \frac{\left(\frac{R}{r}\right)R_S \frac{U_k}{U_S}}{1 - \left(\frac{R}{r}\right)\frac{R_S}{R} \frac{U_k}{U_S}}$$

- Pri direktnom merenju napona, bez delila napona, nepoznati otpor može se izračunati preko izraza:

$$R_X = R_S \frac{U_k}{U_S}$$

6.1.4. Merenje otpora pomoću voltmetra i poznatog otpora

- Za ovu metodu potrebno je imati jedan otpornik čija je vrednost poznata i jedan voltmetar. Šema je data na slici.



R_X – nepoznati otpor,
 R_S – poznati otpor (etalon),
 R_h – potencijometar za podešavanje,
 R_V – otpor voltmetra,
 P – prebacač.

6.1.4. Merenje otpora pomoću voltmetra i poznatog otpora

- U položaju prebacača (1) voltmetar je vezan na nepoznati otpor R_X i meri napon na njemu U_1 .
- U položaju prebacača (2) voltmetar je vezan na poznati otpor R_S i meri napon na njemu U_2 .
- Ako se zanemari unutrašnji otpor voltmetra tada je:

$$U_1 = R'_X I, \text{ (položaj1),}$$

$$U_2 = R_S I, \text{ (položaj2).}$$

- Približna vrednost otpora sada je jednaka:

$$\frac{R'_X}{R_S} = \frac{U_1}{U_2} \left(= \frac{k\alpha_1}{k\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \quad R'_X = R_S \frac{U_1}{U_2} \left(= R_S \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$$

gde je k konstantna instrumenta, α_1 i α_2 su skretanja instrumenata za položaje prekidača (1) i (2), respektivno.

- Ovo je približna vrednost otpora pošto se javlja greška usled zanemarenja uticaja unutrašnjeg otpora voltmetra.

6.1.4. Merenje otpora pomoću voltmetra i poznatog otpora

- Kod merenja treba težiti da voltmetar ima što veću unutrašnju otpornost.
- Međutim, ako to nije slučaj onda se i otpor voltmetra mora uzeti u razmatranje. U tom slučaju, za izmerene napone važi:

$$U_1 = \frac{R_X R_V}{R_X + R_V} I^{(1)}, \text{ (položaj1),}$$

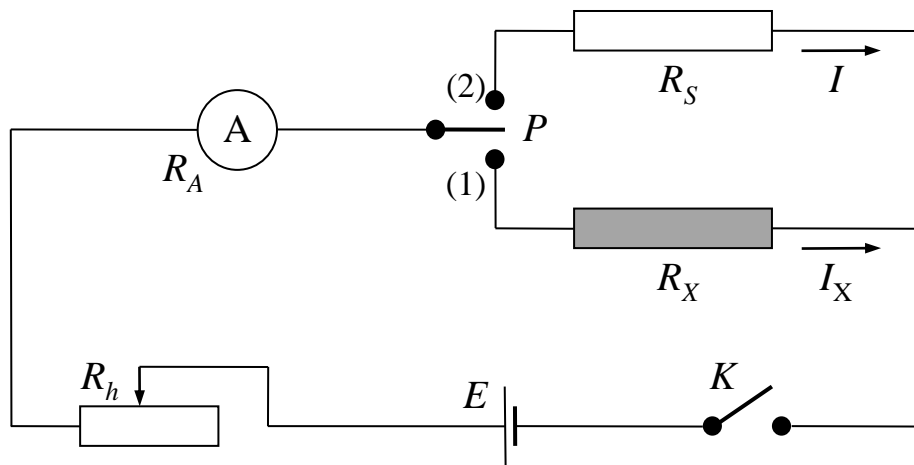
$$U_2 = \frac{R_S R_V}{R_S + R_V} I^{(2)}, \text{ (položaj2),}$$

- Struje imaju različite vrednosti zato što se premeštanjem voltmetra iz položaja (1) u položaj (2) menja ekvivalentna impedansa celog kola, pa i struja u kolu.
- Međutim, može se podesiti pomoću potencijometra R_h da struja u oba slučaja bude ista tj. da je $I^{(1)} = I^{(2)} = I$. U tom slučaju, posle izvođenja, dobija se izraz za tačnu vrednost nepoznatog otpora:

$$R_X = \frac{U_1}{U_2} \frac{R_S}{1 + \left(1 - \frac{U_1}{U_2}\right) \frac{R_S}{R_V}}$$

6.1.5. Merenje otpora pomoću ampermetra i poznatog otpora

- Za ovu metodu potreban je ampermetar i jedan poznati otpornik. Šema je data na slici.



R_X – nepoznati otpor,
 R_S – poznati otpor (etalon),
 R_h – potenciometar za podešavanje,
 R_A – unutrašnji otpor ampermetra,
 P – prebacač.

- Smisao ove metode je poređenje vrednosti struja koje teku kroz nepoznati otpor R_X i poznati otpor R_S .
- Kod merenja je veoma važno da elektromotorna sila izvora E bude konstantna.

6.1.5. Merenje otpora pomoću ampermetra i poznatog otpora

- Kada je P u položaju (1) uključen je nepoznati otpor. Struja je:

$$I_X = \frac{E}{R_h + R_A + R_X}$$

- Kada je P u položaju (2) uključen je poznati otpor. Struja je:

$$I = \frac{E}{R_h + R_A + R_S}$$

- Deljenjem poslednje dve jednačine dobija se:

$$\frac{I_X}{I} = \frac{\frac{E}{R_h + R_A + R_X}}{\frac{E}{R_h + R_A + R_S}} = \frac{R_h + R_A + R_S}{R_h + R_A + R_X} \left(= \frac{k_A \alpha_X}{k_A \alpha_S} = \frac{\alpha_X}{\alpha_S} \right)$$

gde je k_A konstantna ampermetra, α_X i α_S su skretanja instrumenata za položaje prekidača (1) i (2), respektivno.

6.1.5. Merenje otpora pomoću ampermetra i poznatog otpora

- Za vrednost nepoznatog otpora dobija se:

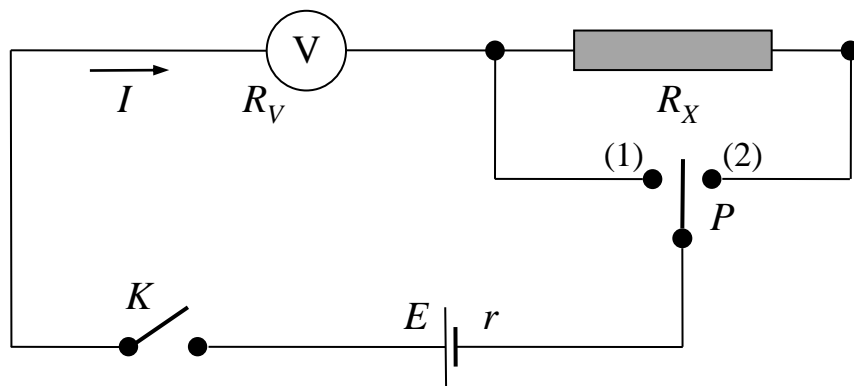
$$R_X = \frac{I}{I_X} (R_h + R_A + R_S) - (R_h + R_A)$$

- Ako pri merenju važi pretpostavka da je $R_A + R_h \ll R_S$, R_X onda se prethodni izraz može pojednostaviti pa se vrednost nepoznatog otpora može odrediti preko izraza:

$$R_X = R_S \frac{I}{I_X} \left(= R_S \frac{\alpha_S}{\alpha_X} \right)$$

6.1.6. Merenje velikih otpora pomoću voltmetra

- Za ovu metodu potreban je precizan voltmetar velikog unutrašnjeg otpora i izvor napajanja konstantne elektromotorne sile. Šema je data na slici.



R_X – mereni otpor,
 R_V – unutrašnji otpor voltmetra,
 r – unutrašnji otpor izvora,
 P – prebacač,
 K – prekidač (taster).

6.1.6. Merenje velikih otpora pomoću voltmetra

- U položaju prekidača (1) voltmetar meri pun napon izvora i tada ima maksimalno pokazivanje. Struja kroz instrument je:

$$I_1 = \frac{E}{r + R_V} (= k_V \alpha_1)$$

gde je k_V konstanta voltmetra, a α_1 pokazivanje instrumenta.

- U položaju prekidača (2) voltmetar je vezan na red sa nepoznatim otporom i pokazivanje je manje. Struja kroz instrument je:

$$I_2 = \frac{E}{r + R_V + R_X} (= k_V \alpha_2)$$

- Deljenjem poslednje dve jednačine dobija se:

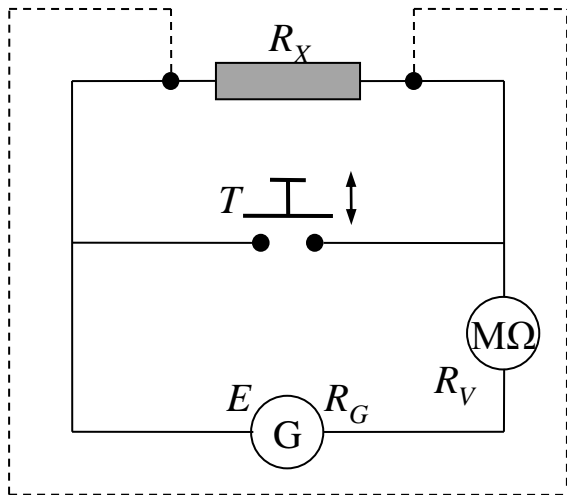
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R_V + R_X}{r + R_V} \left(= \frac{k_V \alpha_1}{k_V \alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$$

- Ako se zanemari unutrašnja otpornost izvora, vrednost nepoznatog otpora može se odrediti preko izraza:

$$R_X = R_V \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - R_V = R_V \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}$$

6.1.7. Merenje otpora pomoću megometra

- Ova metoda služi za merenje velikih otpora. U suštini to je metoda za merenje velikih otpora pomoću voltmetra. Na osnovu nje realizovan je merni instrument koji u sebi sadrži:
 - Izvor napajanja (baterija ili mali ručni generator);
 - Instrument (baždaren direktno u $M\Omega$). To je u suštini voltmetar;
 - Taster koji služi za realizovanje merenja (prebacač);
 - Priključke na koje se vezuje napoznati otpor.
- Šema megometra data je na slici.



- R_X – mereni otpor,
- R_V – unutrašnji otpor voltmetra,
- R_G – unutrašnji otpor izvora,
- T – taster (normalno otvoren),
- $M\Omega$ – instrument,
- G – generator napona.

6.1.7. Merenje otpora pomoću megometra

- Postupak merenja sastoji se u nekoliko koraka.
- Najpre se aktivira generator napajanja.
- Pritiskom na taster T instrument se vezuje direktno na generator. Skretanje instrumenta je maksimalno i odgovara maksimalnoj struji kroz instrument:

$$I_m = \frac{E}{R_G + R_V} = k_V \alpha_m$$

gde je k_V konstanta voltmetra, a α_m pokazivanje instrumenta.

- Otpuštanjem tastera T uključuje se napoznati otpor na red sa instrumentom. Skretanje je sada manje i odgovara struji:

$$I_x = \frac{E}{R_G + R_V + R_X} = k_V \alpha_x$$

6.1.7. Merenje otpora pomoću megometra

- Deljenjem prethodnih jednačina dobija se:

$$\frac{I_x}{I_m} = \frac{\alpha_x}{\alpha_m} = \frac{\frac{E}{R_G + R_V + R_X}}{\frac{E}{R_G + R_V}} = \frac{R_G + R_V}{R_G + R_V + R_X} = \frac{1}{1 + \frac{R_X}{R_G + R_V}}$$

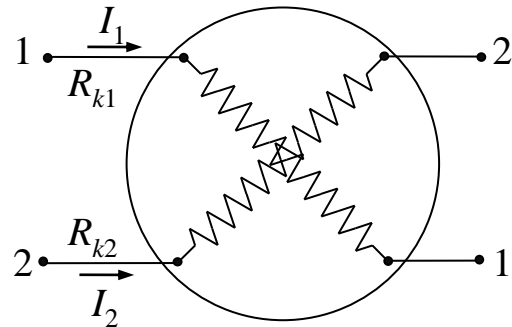
- Iz prethodne jednačine može se izraziti skretanje instrumenta α_x pri merenju nepoznatog otpora R_X :

$$\alpha_x = \alpha_m \frac{1}{1 + \frac{R_X}{R_G + R_V}}$$

- Na osnovu ove jednačine može se izvršiti graduisanje skale instrumenta.
- Vidi se da skretanje instrumenta ne zavisi linearno od otpora već je zavisnost hiperbolička. Prema tome i podela na skali je hiperbolička.

6.1.8. Merenje otpora pomoću logometra

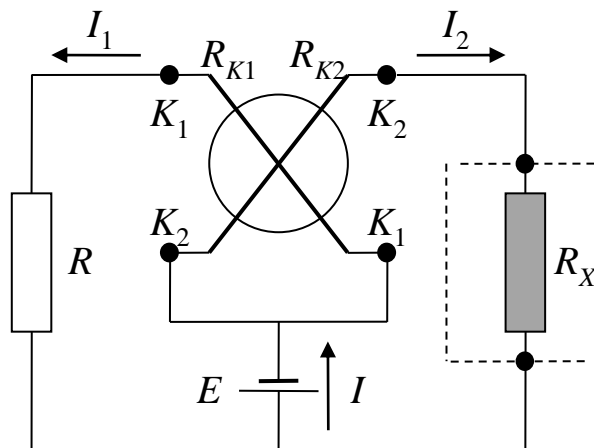
- Principijelna šema logometarskog instrumenta data je na slici.



- Instrument čine dva kalema (namotaja) na istom kretnom objektu.
- Kalemi su mehanički fiksirani i električno razdvojeni. Kalem 1-1' je merni kalem otpora R_{k1} , a 2-2' je uporedni kalem otpora R_{k2} .

6.1.8. Merenje otpora pomoću logometra

- Skretanje kod logometarskog instrumenta proporcionalno je odnosu struja kroz dva kalema, odnosno:
$$\alpha = k \frac{I_1}{I_2}$$
- Primenom ovog instrumenta eliminiše se uticaj varijacije napona napajanja pošto je skretanje instrumenta funkcija odnosa struja kroz namotaje.
- Primenom odgovarajućih šema, logometrom mogu da se mere i veliki i mali otpori.
- Na slici je prikazana šema za merenje velikih otpora.



R_X – mereni otpor,
 R – otpor za poređenje,
 E –izvor (baterija).

6.1.8. Merenje otpora pomoću logometra

- Sa šeme se vidi da su otpori R i R_X vezani na red sa otporima kalema (R na red sa R_{k1} , a R_X na red sa R_{k2}).
- Na osnovu šeme mogu se napisati sledeće jednačine:

$$I = I_1 + I_2$$

$$E = (R_{k1} + R)I_1$$

$$E = (R_{k2} + R_X)I_2$$

- Deljenjem naponskih jednačina dobija se:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{k2} + R_X}{R_{k1} + R}$$

- Skretanje instrumenta je sada:

$$\alpha = k \frac{I_1}{I_2} = k \frac{R_{k2} + R_X}{R_{k1} + R}$$

6.1.8. Merenje otpora pomoću logometra

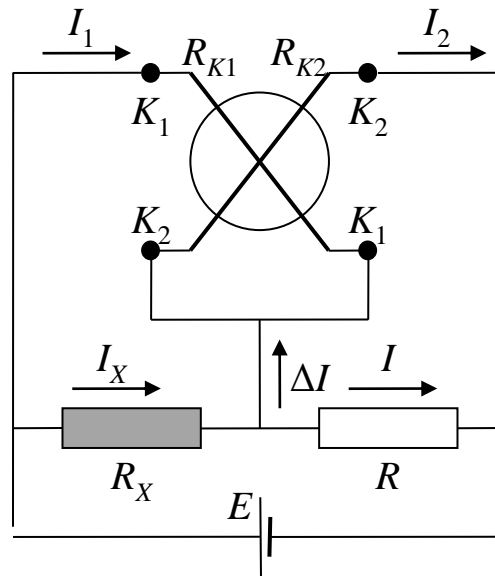
- Ako važi da je $R_{k1} \ll R$ i $R_{k2} \ll R_X$ onda je skretanje instrumenta:

$$\alpha \cong k \frac{R_X}{R}$$

- Iz poslednje jednačine jasno se vidi da je skretanje instrumenta direktno proporcionalno nepoznatom otporu.
- Pored toga, vidi se da otpor R ima ulogu otpora za poređenje.

6.1.8. Merenje otpora pomoću logometra

- Šema za merenje malih otpora primenom logometra data je na slici.



- U ovom slučaju otpori R i R_X vezani su paralelno sa otporima kalema (R u paraleli sa R_{k2} , a R_X u paraleli sa R_{k1}). Sa šeme se vidi da je:

$$\Delta I = I_X - I = I_2 - I_1$$

6.1.8. Merenje otpora pomoću logometra

- Ako se usvoji da je $R_X \ll R_{k1}$ i $R \ll R_{k2}$ može se smatrati da je struja ΔI vrlo mala, pa se može usvojiti da je:

$$\Delta I \cong 0 \rightarrow I_1 \cong I_2 \rightarrow I_X \cong I$$

- Na osnovu šeme važe sledeće jednačine:

$$I_1 R_{k1} = I_X R_X = U_X \quad (\text{napon na } R_X)$$

$$I_2 R_{k2} = I \cdot R \cong I_X R \rightarrow I_X = \frac{R_{k2}}{R} I_2$$

- Za nepoznati otpor sada se dobija:

$$R_X = \frac{U_X}{I_X} = \frac{R_{k1} I_1}{\frac{R_{k2}}{R} I_2} = R \frac{R_{k1}}{R_{k2}} \frac{I_1}{I_2} = R \frac{R_{k1}}{R_{k2}} \frac{\alpha}{k} = k_1 \alpha$$

- Kao što se vidi iz poslednje jednačine, skretanje instrumenta je direktno proporcionalno nepoznatom otporu.