

3. STATISTIČKA OBRADA REZULTATA MERENJA

3.1. Uvod

- Ponavljanjem mernog postupka odnosno vršenjem više merenja na istom mernom objektu dobijaju se kvalitetniji i pouzdaniji rezultati nego kod pojedinačnog merenja.
- Ponavljanjem nekog merenja pri sličnim ili promenljivim uslovima dobija se bolja informacija o merenoj veličini.
- Takođe, može se dobiti i informacija o kvalitetu i karakteristikama merne opreme.
- Serijom ponovljenih merenja dobija se veći broj podataka koji se mogu predstaviti tabelarno.
- Međutim, po pravilu, rezultati merenja daju se preko jednog ili dva brojna podatka.

3.1. Uvod

- Do rezultata merenja koje reprezentuje niz ponovljenih merenja dolazi se statističkom obradom rezultata merenja.
- Statistička teorija ali i iskustvo pokazuju da se način grupisanja merenih rezultata oko neke vrednosti može predstaviti matematičkom funkcijom koja se naziva funkcija raspodele.
- Funkcija raspodele ne pruža informaciju koliko iznosi neka konkretna vrednost mernog rezultata. Međutim, ona daje procenu verovatnoće da će se neki pojedinačni merni podatak nalazati u određenom intervalu.
- Pomoću funkcije raspodele može se proceniti koji deo rezultata će biti u nekom unapred zadatom intervalu.
- Pravilo je da što se ima veći broj merenja primenom funkcije raspodele dobijaju se pouzdaniji rezultati.

3.1. Uvod

- Cilj statističke obrade rezultata merenja je procena prave vrednosti merene veličine i procena merne nesigurnosti korigovanog rezultata merenja.
- Procena prave vrednosti merene veličine podrazumeva određivanje najverovatnije (očekivane) vrednosti merene velične.
- Pokazuje se da je očekivana vrednost jednaka aritmetičkoj sredini rezultata merenja.
- Ovako dobijena vrednost može se korigovati poznatim sistematskim greškama merenja.
- Procena merne nesigurnosti podrazumeva određivanje njene slučajne komponente na osnovu ponovljenih merenja i sistematske komponente kao posledice nepoznatih sistematskih grešaka.

3.1. Uvod

- Ako se neka nepromenljiva merena veličina meri više puta pod istim uslovima i sa istim instrumentom i uz pretpostavku da su eliminisane sistematske greške, dobiće se rezultati koji će se rasipati oko neke vrednosti.
- Do rasipanja dolazi zbog slučajnih grešaka koji nije moguće obuhvatiti korekcijom jer se razlikuju i po intenzitetu i znaku.
- Potrebno je naglasiti da su sve merene veličine ravnopravne. Drugim rečima nijedna nema prednost u odnosu na drugu jer su sve dobijene pod istim uslovima.

3.2. Osnovne veličine iz statističke obrade podataka

3.2.1. Srednja vrednost i standardno odstupanje rezultata merenja

- Ako se izvrši veoma veliki broj merenja jedne iste fizičke veličine dobijaju se rezultati merenja $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ koji se nazivaju populacija.
- Srednja vrednost populacije μ izračunava se kao aritmetička sredina rezultata merenja:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- Prema metodi minimizacije sume kvadrata odstupanja (metoda najmanjih kvadrata) aritmetička sredina je upravo najverovatnija (očekivana) vrednost merene veličine.
- Na osnovu srednje vrednosti populacije mogu se definisati odstupanja pojedinih rezultata merenja od srednje vrednosti:

$$a_i = x_i - \mu$$

3.2.1. Srednja vrednost i standardno odstupanje rezultata merenja

- Odstupanja pojedinih rezultata merenja mogu biti pozitivna i negativna.
- Vrednosti odstupanja mogu da zavise od mnogo faktora. Ako bi se na primer neka veličina merila različitim instrumentima odstupanja mogu da budu značajna.
- Kod manje preciznih instrumenata (industrijski instrumenti) odstupanja mogu da iznose i nekoliko procenata od srednje vrednosti.
- Kod preciznijih instrumenata (laboratorijski instrumenti) odstupanja su znatno manja od 1% srednje vrednosti.
- Za izražavanje veličine odstupanja koristi se statistička veličina standardno odstupanje:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

- Standardno odstupanje se definiše kao veličina čiji je kvadrat pomnožen brojem merenja jednak zbiru kvadrata odstupanja.

3.2.1. Srednja vrednost i standardno odstupanje rezultata merenja

- Može se definisati i relativno standardno odstupanje:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\mu}$$

- Ova veličina se koristi kod izražavanja ponovljivosti merenja.
- Što je σ_r manje ponovljivost je bolja i obratno.
- U statistici se koristi i kvadrat standardnog odstupanja koji se naziva varijansa ili disperzija:

$$Var = \sigma^2$$

- Varijansa predstavlja matematičko očekivanje odstupanja slučajne promenljive od njene srednje vrednosti.

3.2.2. Srednja vrednost i standardno odstupanje uzorka

- Pojam populacije vezuje se za veoma veliki broj merenja. Teorijski gledano to je beskonačno veliki broj merenja.
- Pojam populacije ne mora biti vezan samo za rezultate merenja već to može da bude bilo koja serija podataka iz statistike.
- U realnim eksperimentima merenja se ponavljaju konačan broj puta. Na primer nekoliko desetina puta.
- Dobar primer je industrijska proizvodnja nekog dela. Nakon proizvodnje testira se manji broj delova kako bi se utvrdio kvalitet proizvoda i da li on zadovoljava standarde.
- Pojedinačno ispitivanje svakog proizvoda vrši se vrlo retko.
- Prema tome merenjem se dobije skup rezultata $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$. Ovakav manji skup naziva se uzorak.
- Svaki uzorak predstavlja podskup odgovarajuće populacije.

3.2.2. Srednja vrednost i standardno odstupanje uzorka

- Jadan od osnovnih zadataka statističke obrade rezultata je da se na osnovu uzorka dobije što bolja aproksimacija karakteristika populacije.
- Tu se pre svega misli na srednju vrednost μ i standardno odstupanje σ .
- Kao najbolja aproksimacija srednje vrednosti populacije smatra se srednja vrednost uzorka:

$$x_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (*)$$

- Može se lako pokazati da je za ovako definisanu srednju vrednost suma kvadrata odstupanja minimalna:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_s)^2 \rightarrow \min$$

3.2.2. Srednja vrednost i standardno odstupanje uzorka

- Odstupanja pojedinih članova uzorka od srednje vrednosti data su izrazom:

$$b_i = x_i - x_s$$

- Kombinujući ovu jednačinu sa jednačinom (*) lako se pokazuje da je zbir svih odstupanja jednak 0.
- Standardno odstupanje uzorka od n članova obeležava se sa s i računa se preko izraza:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_s)^2}{n - 1}}$$

- Standardno odstupanje uzorka predstavlja najbolju aproksimaciju standardnog odstupanja σ .

3.2.3. Tačnost, ponovljivost i reproduktivnost rezultata merenja

- Za krajnji rezultat nekog merenja smatra se srednja vrednost uzorka x_s .
- Greška merenja određuje se kao razlika izmerenog i uslovno tačnog rezultata.
- Termin uslovno tačan rezultat odražava činjenicu da je pravu tačnu vrednost teško odrediti.
- Tačna vrednost može da se dobije merenjem sa etalonskim instrumentom u nacionalnoj metrološkoj laboratoriji. Pa i tada tako dobijena vrednost smatra se uslovno tačnom vrednošću.
- Često je uslovno tačna vrednost predmet dogovora između zainteresovanih strana. Prema tome, greška merenja može da se odredi preko izraza:

$$\varepsilon = x_s - x_t$$

gde je x_t uslovno tačna vrednost.

3.2.3. Tačnost, ponovljivost i reproduktivnost rezultata merenja

- Može se definisati i relativna greška kao:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_t} = \frac{x_s - x_t}{x_t}$$

- Tačnost merenja na osnovu publikacije Međunarodni rečnik osnovnih i opštih termina u metrologiji, predstavlja bliskost rezultata merenja i prave (uslovno tačne) vrednosti merene veličine.
- Tačnost je utoliko bolja ukoliko je relativna greška merenja manja. U pomenutim rečniku postoje i sledeće napomene:
 - tačnost je kvalitativan pojam,
 - termin preciznost ne treba da se koristi za tačnost.

3.2.3. Tačnost, ponovljivost i reproduktivnost rezultata merenja

- Mogu se definisati i pojmovi ponovljivost i reproduktivnost merenja.
- Ponovljivost se odnosi na seriju merenja izvršenih pri istim uslovima.
- Isti uslovi merenja podrazumevaju istovetnost mernog postupka, posmatrača, mernih sredstava kao i to da je ponavljanje realizovano u kratkom vremenskom periodu.
- Mera ponovljivosti je relativno standardno odstupanje uzorka:

$$s_r = \frac{s}{x_s}$$

- Ponovljivost merenja je utoliko bolja ukoliko je relativno standardno odstupanje manje.

3.2.3. Tačnost, ponovljivost i reproduktivnost rezultata merenja

- Reproductivnost merenja takođe se izražava relativnim standardnim odstupanjem ali pod uslovom da je serija ponovljenih merenja obavljena u promenljivim uslovima.
- Promenljivi uslovi merenja podrazumevaju različite postupke merenja, različitost mernih sredstava, referentnih etalona, mesta merenja i da je serija merenja izvršena u dužem vremenskom intervalu.

3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Pri ponavljanju nekog merenja može se primetiti da se dobijeni rezultati na neki način grupišu oko srednje vrednosti.
- To grupisanje može se slikovito prikazati pomoću histograma.
- Polazi se od rezultata merenja, odnosno uzorka $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$.
- Rezultati merenja se poređaju po veličini i nanose se na horizontalnu osu počevši od minimalnog rezultata x_{min} pa sve do maksimalnog rezultata merenja x_{max} .
- Ukupan opseg u kome se nalaze svi rezultati merenja deli se na m jednakih intervala (segmenata) širine:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}$$

- Broj intervala histograma može se odrediti na više načina. Jedan od načina je da se izračuna kvadratni koren od broja članova uzorka n i da se tako dobijena vrednost zaokruži na prvi veći ceo broj.

3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Kod histograma apcisa pokazuje skupove rezultata merenja unutar opsega merene veličine, a ordinata učestanost njihovog pojavljivanja.
- Prva faza kod formiranja histograma je grupisanje rezultata merenja u pojedinačne intervale histograma u odnosu na celokupni opseg merenja koji je određen minimalnom x_{min} i maksimalnom x_{max} brojnom vrednošću.
- Pri grupisanju izmerenih podataka u pojedine intervale potrebno je voditi računa da svi rezultati merenja budu obuhvaćeni i da pojedini rezultati merenja budu samo u jednom od intrervalu.
- Pri crtanju histograma na apcisu se nanose intervale histograma, a na ordinatu učestanost intervala, relativna učestanost intervala ili procentualna učestanost intervala.
- Učestanost intervala je broj mernih podataka koji pripadaju pojedinom intervalu.
- Relativna učestanost intervala je broj mernih podataka koji pripadaju pojedinom intervalu podeljen sa ukupnim brojem mernih podataka.

3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- U nekim slučajevima crta se normalizovani histogram kod koga se učestanost intervala deli sa širinom intervala histograma.
- U svakom od intervala, po pravilu, nalazi se nekoliko mernih podataka čiji se broj označava sa n_i i upravo taj broj predstavlja učestanost datog intervala.
- Za svaki interval može se izračunati i relativna učestanost:

$$P_i = \frac{n_i}{n}$$

gde je n ukupan broj rezultata merenja

- Za svaki interval može se odrediti i gustina relativne učestanosti prema izrazu:

$$p_i = \frac{P_i}{\Delta x} = \frac{n_i}{n\Delta x}$$

3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Formiranje histograma biće pokazano na primeru.
- U tabeli su dati podaci dobijeni merenjem otpornosti 20 otpornika čija je nominalna otpornost 100Ω . Podaci su sortirani od najmanjeg do najvećeg.

r.br.	Otpornost [Ω]	r.br.	Otpornost [Ω]
1	98.4	11	101.2
2	99.0	12	101.3
3	99.5	13	101.4
4	99.8	14	101.6
5	100.0	15	102.1
6	100.2	16	102.2
7	100.3	17	102.4
8	100.4	18	102.6
9	100.6	19	103.9
10	101.0	20	104.2

3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Podatak sa najmanjom brojčanom vrednošću je $x_{min} = 98.4 \Omega$, a sa najvećom $x_{max} = 104.2 \Omega$.
- Broj mernih podataka je $n = 20$ pa se na osnovu toga može izračunati broj intervala histograma m . Pošto je $\sqrt{20} = 4.47$ to se za broj intervala dobije da je $m = 5$.
- Može se izračunati i širina jednog intervala histograma:

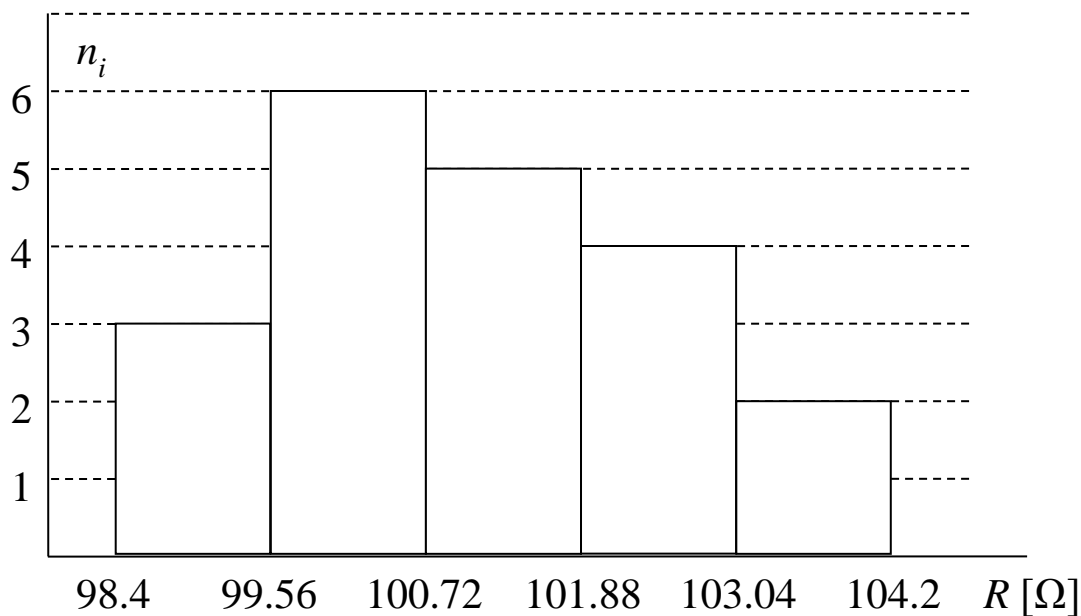
$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m} = \frac{104.2 - 98.4}{5} = 1.16 \Omega$$

- Na osnovu širine pojedinih intervala histograma mogu se izračunati i granice pojedinih intervala. One su: 98.4, 99.56, 100.72, 101.88, 103.04 i 104.2 Ω .
- Prema podacima iz tabele može se odrediti koliko podataka pripada pojedinim intervalima, odnosno kolika je učestanost po pojedinim intervalima. Dobija se:

$$n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 5, n_4 = 4 \text{ i } n_5 = 2$$

3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Na osnovu izračunatih podataka može se nacrtati histogram gde je na ordinati prikazana učestanost pojedinih intervala.

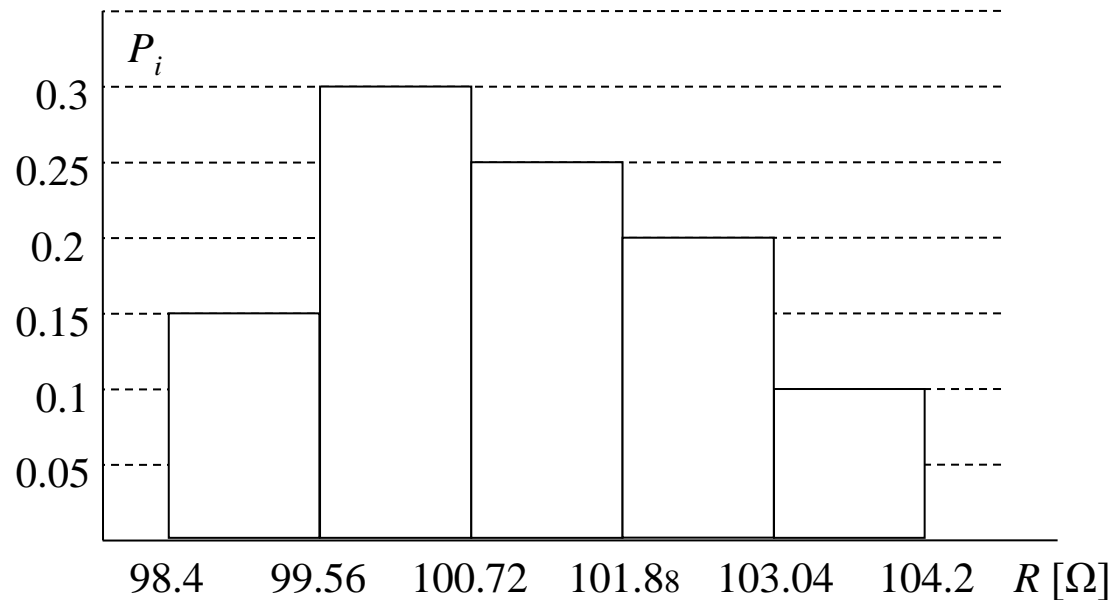


3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Deljenjem učestanosti za pojedine intervale sa ukupnim brojem mernih podataka dobijaju se relativne učestanosti:

$$P_1 = 0.15, P_2 = 0.3, P_3 = 0.25, P_4 = 0.2 \text{ i } P_5 = 0.1$$

- Na osnovu ovih podataka može nacrtati histogram kod koga su na ordinati prikazane relativne učestanosti za pojedine intervale.

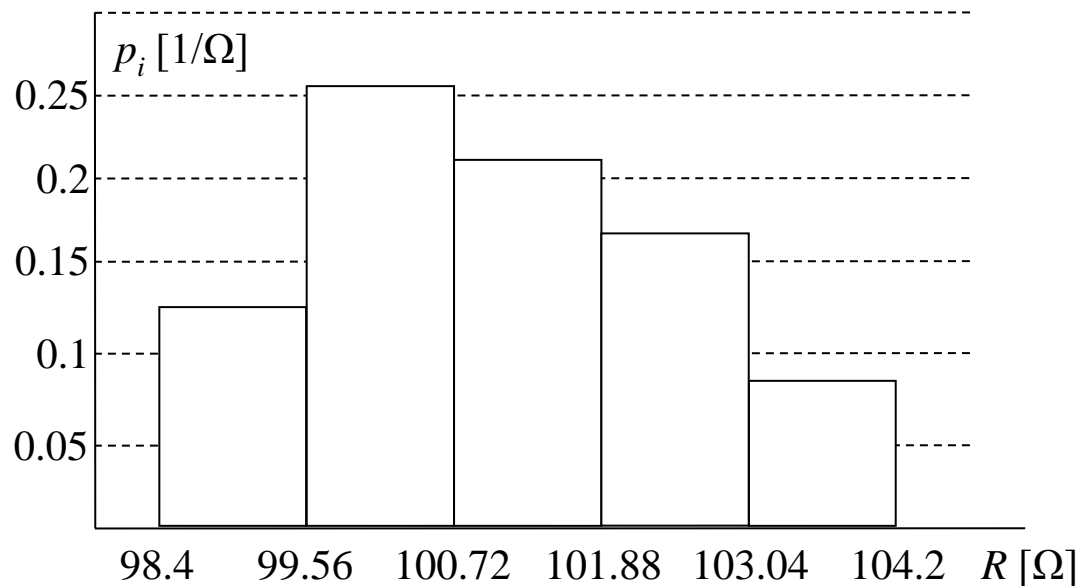


3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Može se nacrtati i normalizovani histogram. Potrebno je izračunati gustine relativne učestanosti za pojedine intervale. Dobijaju se vrednosti:

$$p_1 = 0.1293, P_2 = 0.2586, P_3 = 0.2155, P_4 = 0.1724 \text{ i } P_5 = 0.0862$$

- Na osnovu ovih vrednosti može se nacrtati normalizovani histogram.



3.3. Prikaz rezultata merenja pomoću histograma

- Za normalizovani histogram važi da je celokupna površina svih pravougaonika jednaka 1. To se lako može pokazati sledećim izrazom:

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot \Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{n \Delta x} \Delta x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i = 1$$

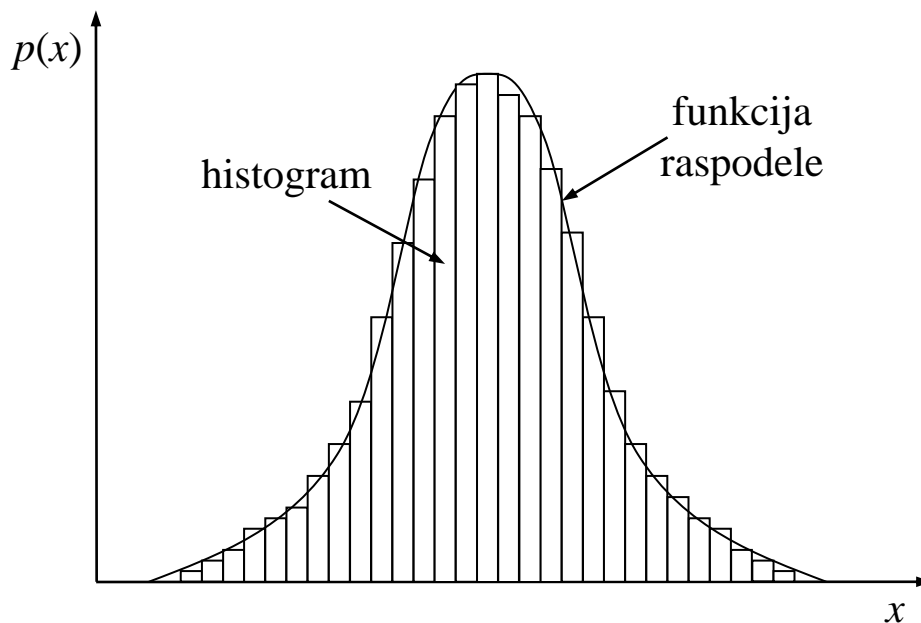
- Ovo je posledica činjenice da se svi rezultati merenja nalaze u intervalu od x_{min} do x_{max} .
- Dobijeni histogrami mogli su se formirati i za drugačiji broj intervala.
- Broj intervala treba pažljivo izabrati.
- Ako je broj intervala mali histogram prikazuje raspodelu rezultata grubo i bez potrebnog razlaganja.
- S druge strane ako je broj intervala preveliki neki od intervala mogu ostati prazni.

3.4. Funkcije raspodele

- U prethodnoj sekciji analiziran je slučaj sa 20 mernih podataka i formiran je histogram koji je imao 5 intervala.
- Ako bi broj mernih podataka bio veći onda bi i histogram imao više intervala.
- U graničnom slučaju kada broj rezultata merenja n teži beskonačnosti uzorak prelazi u populaciju, a rezultati merenja bi praktično bili kontinualno raspoređeni po x -osi.
- U tom slučaju dolazi do sledećih graničnih procesa:
 - Broj segmenata histograma postaje beskonačan, $m \rightarrow \infty$
 - Širina segmenata postaje infinitezimalna. $\Delta x \rightarrow dx$
 - Relativna učestanost postaje infinitezimalna, $P_i \rightarrow dP(x)$
 - Gustina relativne učestanosti postaje kontinualna funkcija, $p_i \rightarrow p(x)$

3.4. Funkcije raspodele

- Gustina relativne učestanost predstavlja envelopu (obvojnici) histograma kao što je prikazano na slici.



- Funkcija $p(x)$ naziva se funkcija raspodele verovatnoće ili samo funkcija raspodele datog merenja i može se dati izrazom:

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

3.4. Funkcije raspodele

- Verovatnoća da se neki rezultat merenja nađe u infinitezimalnom intervalu $(x, x+dx)$ je:

$$dP(x) = p(x)dx$$

- Verovatnoća da se neki rezultat X nađe u konačnom intervalu (x_1, x_2) data je integralom:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

- Svaka funkcija raspodele je normirana kao što je to slučaj i sa normalizovanim histogramom. Ovo praktično znači da je ukupna površina ispod krive brojčano jednaka vrednosti 1, odnosno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

3.4. Funkcije raspodele

- Ako je funkcija raspodele poznata odnosno ako se može analitički izraziti, srednja vrednost i standardno odstupanje mogu se odrediti pomoću izraza:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x)dx$$

- Pri analizi rezultata merenja koristi se različite funkcije raspodele.
- Koja će se raspodela koristiti najviše zavisi od toga šta je predmet merenja, odnosno koja se veličina meri.
- U nastavku biće prikazane funkcije raspodele koje se najčešće koriste pri obradi rezultata merenja.

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Najčešće korišćena funkcija raspodele kod statističke obrade rezultata merenja je Gausova ili normalna raspodela.
- Ona se najčešće koristi i u matematici kod analize slučajnih brojeva i procesa.
- Kad god imamo neki slučajni proces koji se ponavlja više puta slučajna promenljiva ima tendenciju da ima normalnu raspodelu.
- Slično, kod merenja neke veličine, kada se merni proces ponavlja više puta, rezultat merenja ima tendenciju da ima normalnu raspodelu.
- Ovakvo ponašanje slučajnih promenljivih prvi je predstavio De Moivre kroz rad poznat kao teorema o centralnoj granici, 1733. godine.
- Nažalost, njegovo delo je neko vreme bilo izgubljeno, a Gauss je nezavisno razvio normalnu raspodelu skoro 100 godina kasnije.
- Iako su De Moivre-u kasnije pripisane ove zasluge, normalna raspodela se danas naziva i Gausova raspodela.

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Gausova raspodela analitički se može opisati izrazom:

$$p_G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gde je μ srednja vrednost, a σ standardno odstupanje promenljive x .

- Za Gausovu raspodelu koristi se standardna notacija $N(\mu, \sigma^2)$.
- Očekivana (najverovatnija) vrednost i varijansa su:

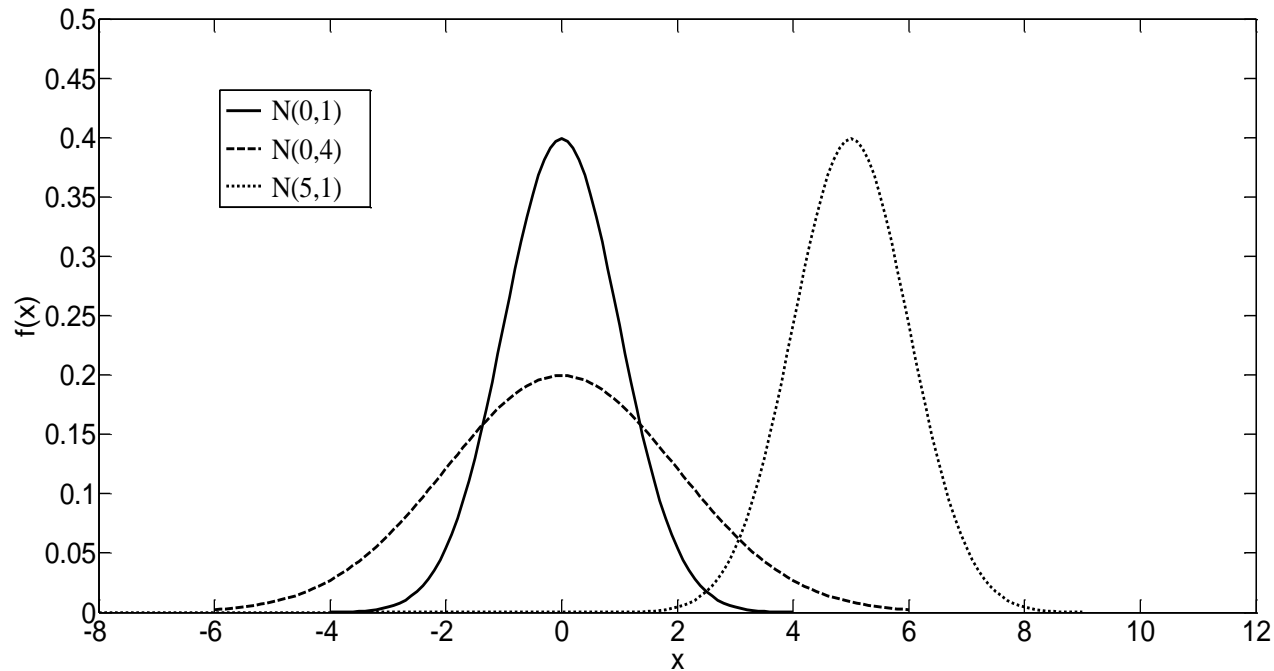
$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

- Veličina X u prethodnim izrazima označava slučajnu promenljivu.
- Parametri Gausove raspodele su srednja vrednost μ i standardno odstupanje σ .
- Vrednost $E(X)=\mu$ određuje centar funkcije raspodele, a vrednost $V(X)=\sigma^2$ određuje širinu.

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Na slici je prikazano nekoliko Gausovih raspodela sa različitim vrednostima μ i σ^2 .



3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Sve Gausove raspodele su simetrične krive karakterističnog oblika zvona, pri čemu se centar i širina krive razlikuju.
- Simetričnost krive odražava eksperimentalnu činjenicu da su pozitivna i negativna odstupanja rezultata oko srednje vrednosti podjednako verovatna.
- Za $x = \mu$ funkcija $p_G(x)$ ima maksimum:

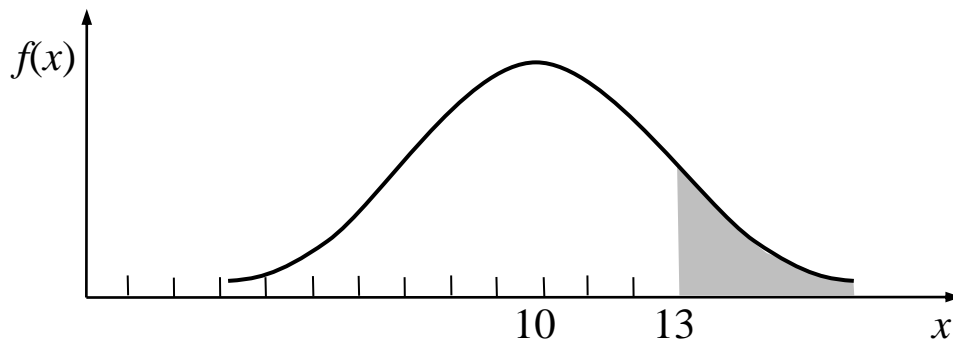
$$p_G(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- Verovatnoća da se neki rezultat X nađe u konačnom intervalu (x_1, x_2) određena je integralom:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (*)$$

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Ovo se može ilustrovati kroz primer.
- Neka izmerene vrednosti struje u nekom provodniku prate normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću od 10 A i varijansom od 4 A².
- Pitanje je, kolika je verovatnoća da vrednost struje bude veća od 13 A?
- Ako se sa X označi struja u A, tražena verovatnoća se može predstaviti kao $P(X > 13)$.
- Ova verovatnoća je prikazana kao osenčeno područje ispod funkcije Gausove raspodele na slici.



3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Na žalost, integral dat jednačinom (*) ne može se analitički rešiti.
- Verovatnoće zasnovane na normalnoj raspodeli obično se nalaze numeričkim putem ili iz tabele.
- Posebna forma Gausove raspodele je Gausova standardizovana raspodela. Ona se dobija uvođenjem bezdimenzionalne promenljive z :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (**)$$

- Imajući u vidu ovu smenu važi da je $dx = \sigma dz$. Izraz (*) sada postaje:

$$P(z_1 < Z < z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (***)$$

- Granice gornjeg integrala određene su izrazom (**).

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Prethodnim izrazom definisana je standardna ili uopštena Gausova raspodela:

$$p_{GS}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- Za standardnu Gausovu raspodelu važi da je:

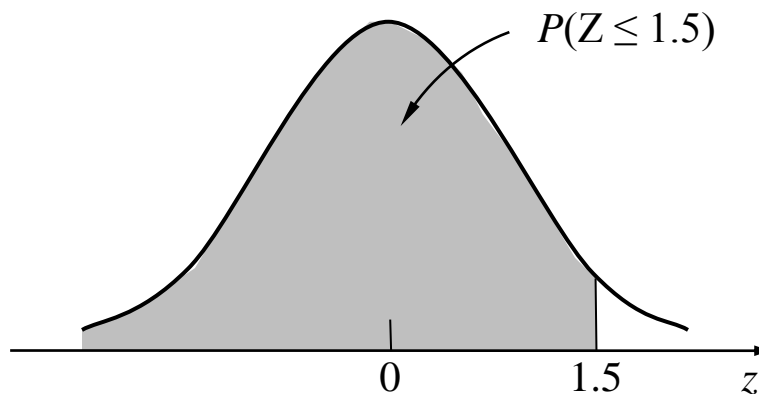
$$E(Z) = \mu = 0$$

$$V(Z) = \sigma^2 = 1$$

- Drugim rečima srednja vrednost bezdimenzionalne veličine z jednaka je 0, a standardno odstupanje je takođe bezdimenzionalna veličina i jednako je 1. Maksimalna vrednost funkcije ima se za $z = 0$ i iznosi $1/\sqrt{2\pi}$.
- Sve Gausove raspodele, bez obzira na vrednost za μ i σ , mogu se smenom (***) preslikati u jedinstvenu raspodelu p_{GS} .
- Važi i obratno. Standardna Gausova raspodela može se preslikati u bilo koju Gausovu raspodelu pod uslovom da se poznaju μ i σ .

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Verovatnoća da se neki rezultat nalazi u zadanom opsegu određena je integralom koji je dat jednačinom (***) .
- Kao što je već rečeno ovaj integral ne može se analitički rešiti pa se verovatnoće daju tabelarno.
- Primera radi, verovatnoća da je neki rezultat Z manji ili jednak od zadate vrednosti z odnosno $P(Z < z)$ ilustrovana je na slici.
- Ovde je primera radi uzeta vrednost $z = 1.5$.



- Da bi se odredila verovatnoća $P(Z < 1.5)$ potrebno je pročitati vrednost iz tabele verovatnoća za standardizovanu Gausovu raspodelu.

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Primenom tabele može se odrediti verovatnoća da se neki rezultat nalazi u bilo kom intervalu.
- Pri tome se može iskoristiti činjenica da je Gausova raspodela simetrična i da je ukupna površina ispod krive jednaka 1.
- Data tabela može se primeniti na proizvoljnu Gausovu raspodelu koristeći smenu datu jednačinom (**).
- Kao ilustracija može da se iskoristi prethodni primer sa merenjem struje u provodniku gde izmerene vrednosti struje prate normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću od 10 A i varijansom od 4 A².
- Bilo je pitanje, kolika je verovatnoća da vrednost struje bude veća od 13 A? Drugim rečima potrebno je odrediti $P(X > 13)$.
- Koristeći jednačinu (**) Gausova raspodela preslikaće se u standardizovanu Gausovu raspodelu pa važi:

$$Z = \frac{X - 10}{2} = \frac{13 - 10}{2} = 1.5$$

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Primenom podataka iz tabele dobija se:

$$P(X > 13) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

- Za slučajnu promenljivu koja podleže normalnoj raspodeli važi sledeće:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$

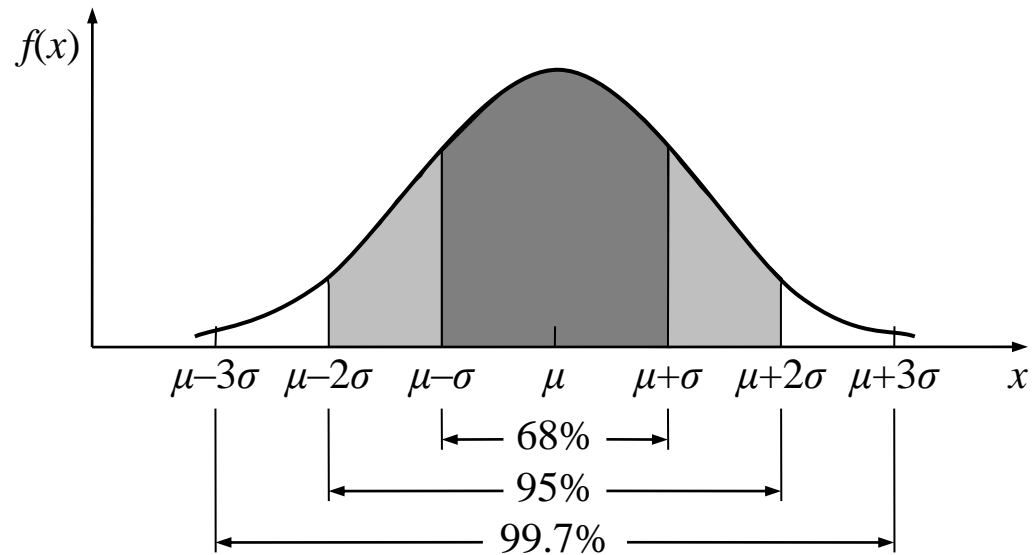
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

- Ovo znači da u intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ima oko 68% rezultata. Drugim rečima, statističkoj sigurnosti od 68% odgovara interval rezultata $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.
- U intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ili $\mu \pm 3\sigma$ nalazi se 99,7% rezultata pa se može praktično reći da se u ovom intervalu nalaze svi rezultati.
- Interval $\mu \pm 3\sigma$ naziva se i maksimalna greška.

3.4.1. Gausova (normalna) raspodela

- Pomenuti intervali se nazivaju i intervali poverenja i prikazani su na slici.



3.4.2. Uniformna (ravnomerna) raspodela

- Uniformna raspodela je najjednostavnija funkcija raspodele.
- Uniformna raspodela se definiše za slučajne promenljive ograničene sa dve zadate vrednosti. Analitički izraz za uniformnu raspodelu je:

$$p_U(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$$

- Ovako definisana uniformna raspodela ispunjava uslov normiranosti, odnosno važi da je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_U(x) dx = 1$$

- Srednja (očekivana) vrednost za uniformnu slučajnu promenljivu X je:

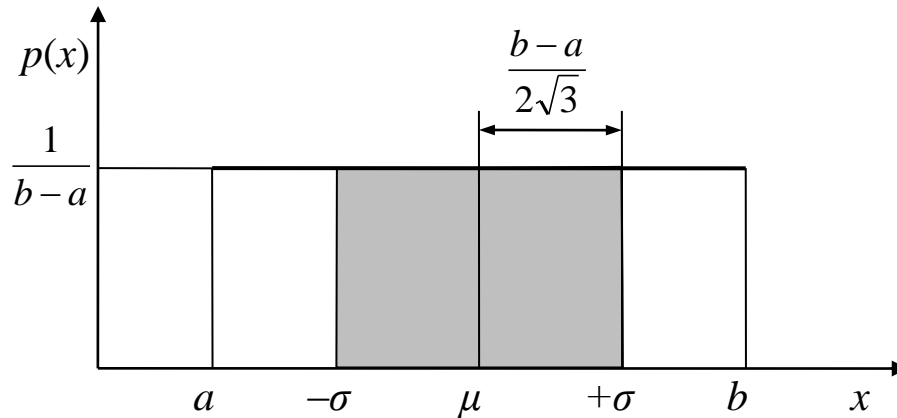
$$\mu = E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{b-a} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

3.4.2. Uniformna (ravnomerna) raspodela

- Varijansa za slučajnu promenljivu X je:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{b-a} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Na slici je prikazana uniformna raspodela.



3.4.2. Uniformna (ravnomerna) raspodela

- Verovatnoća da se neki rezultat X nađe u konačnom intervalu (a, x) određena je integralom:

$$P(a < X < x) = \int_a^x p_U(x) dx$$

- Rešenje integrala može se predstaviti jednačinom:

$$P(a < X < x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x - a)/(b - a), & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

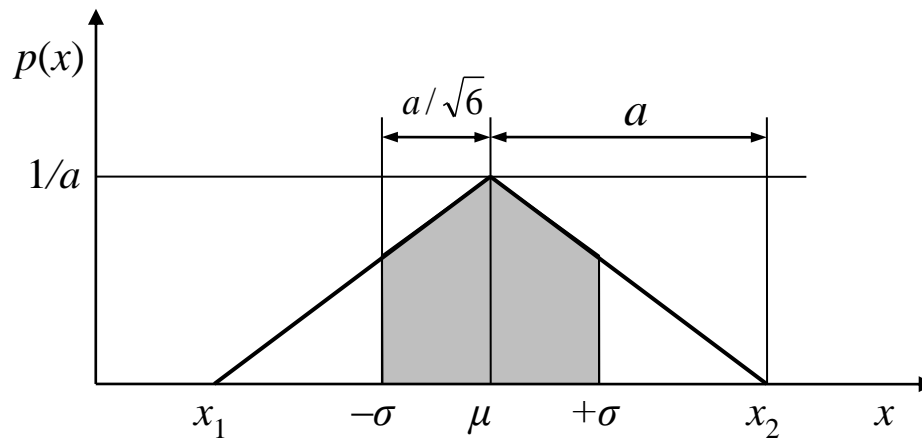
- Na slici je šrafirana površina u intervalu $\mu \pm \sigma$. Ta površina iznosi 0.577. Ovo znači da intervalu $\mu \pm \sigma$ odgovara statistička sigurnost od 57.7%.

3.4.2. Uniformna (ravnomerna) raspodela

- Uniformna raspodela se primenjuje kada se raspolaže sa malo informacija o nekom instrumentu.
- Na primer, u proizvođačkoj specifikaciji nalazi se podatak da instrument ima garantovanu grešku manju od 1.5% maksimalne vrednosti U_m .
- Ako ne postoji drugi podatak o grupisanju rezultata oko srednje vrednosti, može se pretpostaviti da rezultati pri nekoj vrednosti merene veličine imaju uniformnu raspodelu kod koje je $a = 0.985U_m$ i $b = 1.015U_m$.
- Uniformna raspodela koristi se pri određivanju nesigurnosti u nekim karakterističnim slučajevima. Na primer kod generisanja slučajnih brojeva.
- Zatim pri očitavanju na skali digitalnih indikatora (tada proširena nesigurnost iznosi najmanje pola digita).
- Takođe, kada se raspolaže sa tabličnim podacima o vrednostima parametara materijala (specifična otpornost, gustina, i sl.) koji se nalaze u opsegu (x_{min} , x_{max}). Za srednju vrednost tada se usvaja $\mu = (x_{min} + x_{max})/2$, a parametri raspodele su $a = x_{min}$ i $b = x_{max}$.

3.4.3. Simetrična trougaona funkcija raspodele

- Trougaona simetrična raspodela prikazana je na slici.



- Trougaona i uniformna raspodela imaju osobinu da im je interval u kome se nalaze rezultati ograničen. Sa slike se vidi da se svi rezultati nalaze u ograničenom intervalu poluširine a , simetrično raspoređeni oko srednje vrednosti μ .

3.4.3. Simetrična trougaona funkcija raspodele

- Karakteristika trougaone raspodele je skoncentrisanost rezultata oko srednje vrednosti. To znači da se manja odstupanja rezultata od srednje vrednosti verovatnija od većih odstupanja.
- Ukupna površina ispod trougla sa slike mora biti jednaka 1 kako bi se ispunio uslov normiranosti funkcije raspodele.
- Dobija se da je maksimalna vrednost raspodele jednaka $p(\mu) = 1/a$.
- Analitički izraz za trougaonu simetričnu raspodelu je:

$$p_T(x) = \begin{cases} (x - x_1) / a^2, & x_1 \leq x \leq \mu \\ (x_2 - x) / a^2, & \mu < x \leq x_2 \\ 0, & x < x_1, x > x_2 \end{cases}$$

3.4.3. Simetrična trougaona funkcija raspodele

- Srednja (očekivana) vrednost za slučajnu promenljivu X kod trougaone raspodele je:

$$\mu = E(X) = \int_{x_1}^{x_2} xp_T(x)dx = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

- Varijansa za slučajnu promenljivu X je:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_T(x)dx = \frac{a^2}{6}$$

- Na slici šrafirana je površina u intervalu $\mu \pm \sigma$. Ta površina iznosi 0.65. Ovo znači da intervalu $\mu \pm \sigma$ odgovara statistička sigurnost od 65%.
- Trougaona raspodela primenjuje se kada se zna da postoji jasno grupisanje mernih rezultata oko srednje vrednosti.

3.4.4. Weibull-ova raspodela

- Weibull-ova raspodela se koristi da opiše varijacije brzine vetra. Takođe, koristi se da modeluje vreme do kvara kod mnogih fizičkih sistema.
- Parametri raspodele pružaju veliku fleksibilnost za modelovanje sistema u kojima se broj kvarova povećava s vremenom, smanjuje s vremenom ili ostaje konstantan tokom vremena.
- Analitički izraz za Weibull-ovu raspodelu je:

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right], x > 0,$$

gde je $\delta > 0$ parametar (faktor) skaliranja, a $\beta > 0$ je parametar (faktor) oblika.

- Srednja vrednost Weibull-ove raspodele je:

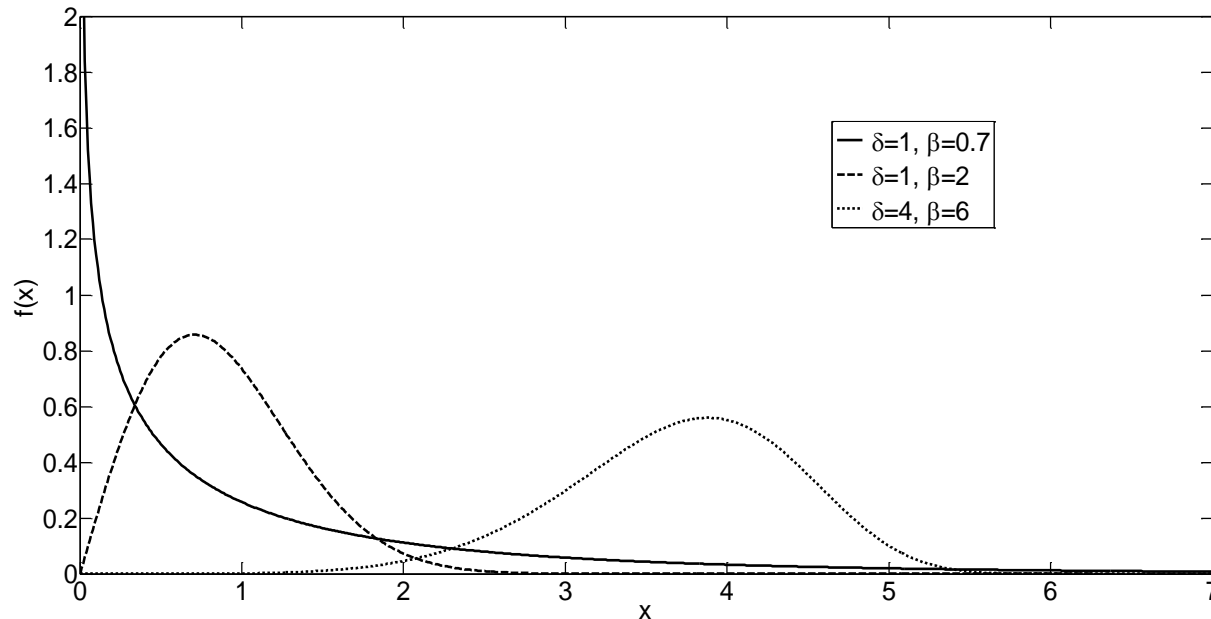
$$\mu = E(X) = \delta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

3.4.4. Weibull-ova raspodela

- Varijansa Weibull-ove raspodele je:

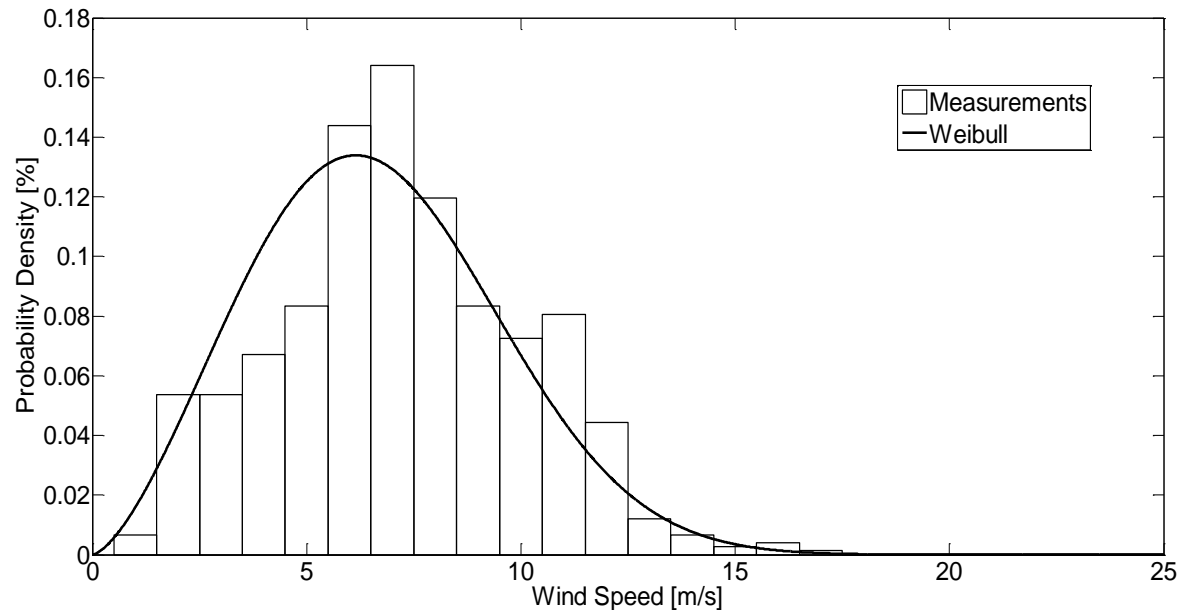
$$\sigma^2 = V(X) = \delta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2$$

- Fleksibilnost Weibull-ove raspodele ilustrovana je na slici.



3.4.4. Weibull-ova raspodela

- Primena Weibull-ove raspodele kod modelovanja brzine vetra ilustrovana je na slici. Podaci o vetru dobijeni su merenjem na analiziranoj lokaciji u trajaju od godinu dana.
- Na osnovu izmerenih podataka za parametre Weibull raspodele dobijene su sledeće vrednosti: $\delta = 7.54$ m/s and $\beta = 2.5$.



3.4.5. Beta raspodela

- Beta raspodela je fleksibilna raspodela ali ograničena na konačnom intervalu.
- Deo sunčevog zračenja koje apsorbuje materijal je dobar primer kontinualne slučajne promenljive na intervalu $[0, 1]$. Ova pojava može se modelovati pomoću Beta raspodele.
- Analitički izraz za Beta raspodelu je:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, x \in [0, 1]$$

gde je $\alpha > 0$ parametar (faktor) skaliranja, $\beta > 0$ parametar (faktor) oblika i $\Gamma(*)$ je gama funkcija.

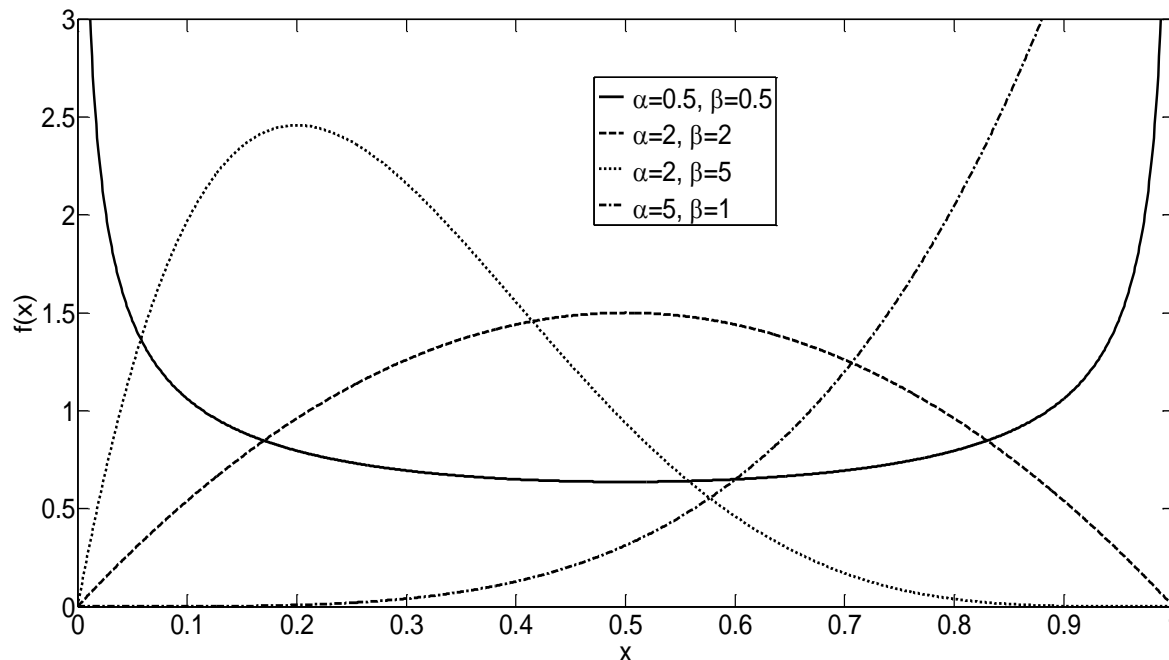
- Srednja vrednost i varijansa Beta raspodele je:

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

3.4.5. Beta raspodela

- Parametri α i β omogućavaju da Beta raspodela poprimi različite oblike. Neki primeri su dati na slici.
- Za $\alpha = \beta$ raspodela je simetrična u odnosu na vrednost $x = 0.5$. Drugačiji izbor parametara daje nesimetričnu raspodelu.



3.5. Merna nesigurnost

- Pri merenju ne može se odrediti apsolutno tačna vrednost merene veličine.
- Svaki rezultat merenja sadrži određenu nesigurnost.
- Merna nesigurnost omogućava da se kvantifikuje činjenica da se pri merenju ne može dobiti tačna vrednost merene veličine.
- Može se reći da je merna nesigurnost sumnja u rezultat merenja.
- Da bi se postigla jednoobraznost u izražavanju mernih rezultata vodeće međunarodne institucije u oblasti metrologije publikovale su 1995. godine Uputstvo za izražavanje merne nesigurnosti (The Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement).
- Do tada za obradu i izražavanje rezultata merenja koristila se matematička disciplina teorija grešaka.
- Načini obrade rezultata nisu bili ujednačeni, pa je bilo teško porediti ista merenja izvršena u različitim institucijama.

3.5. Merna nesigurnost

- Obradom mernih rezultata na način opisan u Uputstvu za izražavanje merne nesigurnosti dobija se merni rezultat, merna nesigurnost i statistička sigurnost sa kojom važe dobijeni podaci.
- Potrebno je reći da uspešno merenje zavisi od:
 - razumevanja merne nesigurnosti,
 - izražavanja merne nesigurnosti mernog sredstva,
 - sledivosti do nacionalnog etalona i
 - primene dobre metrološke prakse.
- Svrha određivanja merne nesigurnosti je donošenje odluke da li je rezultat adekvatan za svrhu merenja i da se proceni konzistentnost rezultata sa drugim sličnim rezultatima.
- Rezultat merenja je kompletan samo ukoliko ga prati kvantitativna izjava o njegovoj mernoj nesigurnosti.

3.5. Merna nesigurnost

- Posebno je važno naglasiti da greška merenja i merna nesigurnost nisu isto.
- Greška je razlika između izmerene i prave vrednosti, a merna nesigurnost je kvantifikacija sumnje u rezultat merenja.
- Podatak o mernoj nesigurnosti je važan radi dobijanja dobrog kvaliteta merenja ili razumevanja samog rezultata merenja.
- Podatak o mernoj nesigurnosti je važan u različitim slučajevima.
- Kod etaloniranja merna nesigurnost se mora izraziti u setifikatu o etaloniranju.
- Kod ispitivanja merna nesigurnost je kriterijum da li proizvod prolazi ili se odbija.
- Takođe, merna nesigurnost je važna i kod određivanja tolerancije. Merna nesigurnost donosi odluku da li su tolerancije postignute.

3.5. Merna nesigurnost

- Uzroci merne nesigurnosti mogu biti brojni:
 - merno sredstvo (promena napona napajanja, šum)
 - predmet merenja,
 - proces merenja,
 - unešene merne nesigurnosti (kalibracija),
 - veština merioca,
 - uzorkovanje,
 - uticaj okoline (temperatura, pritisak).
- Svaki od ovih izvora nesigurnosti treba da bude pojedinačni ulazni podatak pri proceni merne nesigurnosti.
- Potrebno je reći da gore nabrojani uzroci svakako utiču i na grešku merenja.

3.5. Merna nesigurnost

- Pri izražavanju merne nesigurnosti koriste se termini i matematički aparat iz klasične statističke teorije.
- Međutim, koriste se i pojmovi koji su uvedeni za oblast izražavanja merne nesigurnosti.
- Usvojeno je da se merna nesigurnost izražava slovom u (od engleske reči *Uncertainty*).
- Osnovni princip je da se svakom podatku o nesigurnosti pridruži odgovarajuća funkcija raspodele kao i verovatnoća, odnosno statistička sigurnost.
- U nasvratku će biti dati osnovni pojmovi koji se koriste u oblasti merne nesigurnosti.

3.5. Merna nesigurnost

- Standardna merna nesigurnost u po definiciji jednaka je standardnom odstupanju, $u = s$.
- Statistička sigurnost koja odgovara standardnoj mernoj nesigurnosti zavisi od raspodele koja se pripisuje datom merenju.
- Na primer, u slučaju Gausove raspodele, intervalu širine jednog standardnog odstupanja $x_s \pm u$ odgovara sigurnost od 68.27%.
- Proširena merna nesigurnost U , predstavlja umnožak standardne merne nesigurnosti i koeficijenta proširenja k , tj. $U = ku$.
- Koeficijent k može imati vrednost u intervalu od $\sqrt{3}$ do 3, zavisno od raspodele.
- Proširenoj mernoj nesigurnosti odgovara visoka vrednost statističke sigurnosti, reda veličine 99%.
- To znači da se merena veličina sa velikom sigurnošću nalazi u intervalu $x_s \pm U$.

3.5. Merna nesigurnost

- U cilju pojašnjenja kvantifikovanja merne nesigurnosti može se dati jedan primer. Merena je dužina štapa i dat je rezultat merenja:

200 cm \pm 1 cm (statistička sigurnost 95%, koeficijent proširenja $k = 2$).

- Ovakav rezultat merenja znači da je sa 95% sigurnosti prava dužina štapa između 199 cm i 201 cm.
- Postoje dva osnovna tipa standardne nesigurnosti, tip A i tip B. Ova podela je zasnovana isključivo na osnovu metoda kojima se nesigurnosti određuju.
- U određenim uslovima koristi se i takozvana kombinovana merna nesigurnost.

3.6. Regresiona analiza

- Kod praktičnih merenja često je potrebno odrediti zavisnost jedne veličine od druge.
- Na osnovu izmerenih tačaka potrebno je odrediti krivu koja na najbolji način prikazuje ovu zavisnost. Taj postupak naziva se fitovanje.
- Fitovanje je praktično procedura provlačenja prave ili glatke krive linije koja prolazi u blizini merenih tačaka.
- Fitovanje ne podrazumeva spajanje izmerenih tačaka izlomljenom linijom. Na takav način ne bi se dobila prava zavisnost izmerenih veličina.
- Svaka linija između merenih tačaka je matematički prihvatljiva kao grafička predstava datih podataka ako je maksimalna devijacija mernih tačaka od krive u okviru granica greške merenja.
- Međutim, od brojnih krivih koje se mogu povući između tačaka, a koje zadovoljavaju prethodni kriterijum samo je jedna optimalna.
- Optimalnu linija se ima kada je suma negativnih grešaka tačaka sa jedne strane linije balansirana sumom pozitivnih grešaka koje se nalaze sa druge strane linije.

3.6. Regresiona analiza

- Mereni podaci često mogu da budu takvi da se prihvatljiva aproksimacija optimalne krive može dobiti vizuelno („od oka”).
- Međutim, egzaktan način za dobijanje optimalne krive je primena tehnike regresione analize.
- Regresiona analiza predstavlja pronalaženje matematičke veze između dve merene vrednosti x i y , takve da se vrednost promenljive y može predvideti na osnovu izmerene vrednosti druge promenljive x .
- Regresionu analizu ne treba posmatrati kao magičnu formulu koja može da fituje podatke u svim slučajevima zato što mereni podaci moraju da ispune određene uslove.
- Najbolji način da se utvrdi da li su neki mereni podaci pogodni za primenu regresione analize je crtanje aproksimativnog grafa.
- To može da pokaže da li neki izmereni podaci imaju grešku koja može da bude posledica ljudske greške ili greške mernog sistema. Takve izmerene podatke treba dodatno proveriti.

3.6. Regresiona analiza

- U nekim slučajevima izmereni skup podataka je takav da se regresiona analiza ne može uspešno primeniti pa za takve podatke ostaje tabelarni prikaz.
- Regresiona analiza je najjednostavnija ako je zavisnost između dve merene veličine linearna. Međutim, to često nije slučaj.
- Kakva je zavisnost između merenih veličina može se jednostavno videti kada se izmerene tačke nacrtaju na odgovarajućem grafu.
- Poznavanje fizičkih zakona kojim su izmerene veličine povezane dobra je osnova za nalaženje odgovarajuće funkcionalne zavisnosti između merenih veličina.
- To može da bude linearna zavisnost, kvadratna zavisnost, zavisnost koja je polinomialna funkcija višeg reda, eksponencijalna zavisnost,...

3.6. Regresiona analiza

- U nekim slučajevima izmereni podaci mogu da se transformišu tako da se dobije linearna funkcionalna zavisnost.
- Na primer, neka između dve promenljive postoji funkcionalna zavisnost $y=ax^c$. Iz ovakve zavisnosti može se dobiti linearna zavisnost koristeći logaritamsku transformaciju, odnosno $\log(y) = \log(a) + c\log(x)$.
- Primenom ovakve transformacije može se, koristeći linearnu regresiju, odrediti najpre funkcionalna zavisnost između veličina $\log(y)$ i $\log(x)$, a zatim i zavisnost veličina y i x .
- Linearna zavisnost, kao i zavisnosti višeg reda veličine y od veličine x , mogu se predstaviti sledećom jednačinom:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$$

3.6. Regresiona analiza

- Određivanje (estimacija) parametara a_0, \dots, a_p može biti veoma komplikovano ako p ima veliku vrednost.
- Na sreću, veliki broj mernih podataka može se fitovati polinomima nižeg reda.
- Tako se, na primer, kvadratna regresija koristi za estimaciju parametara kada veličina p ima vrednost 2. Za veće vrednosti veličine p primenjuje se polinomialna regresija.
- U nekim slučajevima na osnovu nacrtanih merenih tačaka i fizičkih zakona ne može se predvideti zavisnost između merenih veličina pa u tom slučaju treba eksperimentisati sa redom polinomialne zavisnosti s ciljem da se dobije adekvatna relacija ali ne previše složena.

3.6.1. Linearna regresija

- Ako za skup od n merenja y_1, \dots, y_n i x_1, \dots, x_n , postoji linearna relacija između veličina y i x , onda se ona može izraziti jednačinom $y=a+bx$, gde su koeficijenti a i b konstantni.
- Cilj linearne regresije je određivanje optimalnih vrednosti koeficijenata a i b takvih da linija najbolje fituje izmerene podatke.
- Odstupanje (devijacija) neke izmerene tačke (x_i, y_i) od linije kojom se fituju te tačke može da se izrazi na sledeći način:

$$d_i = y_i - (a + bx_i)$$

- Najbolja linija za fitovanje izmerenih tačaka dobija se kada je suma kvadrata odstupanja minimalna.
- Suma kvadrata odstupanja može se izraziti sledećom jednačinom:

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

3.6.1. Linearna regresija

- Minimum sume kvadrata odstupanja, S , može se odrediti izjednačavanjem parcijalnih izvoda $\partial S / \partial a$ i $\partial S / \partial b$ sa nulom i rešavanjem tako dobijenog sistema od dve jednačine:

$$\partial S / \partial a = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - bx_i)(-1) = 0 \quad (*)$$

$$\partial S / \partial b = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0 \quad (**)$$

- Sređivanjem jednačine (*) dobija se:

$$\sum a + b \sum x_i = \sum y_i$$

odnosno

$$na + b \sum x_i = \sum y_i$$

3.6.1. Linearna regresija

- Iz poslednje jednačine može da se izrazi koeficijent a :

$$a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n}$$

- Iz jednačine (**) sređivanjem se dobija:

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

- Zamenom izraza za koeficijent a u poslednju jednačinu može da se izrazi koeficijent b :

$$\frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n} \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

3.6.1. Linearna regresija

- Pošto je:

$$\frac{\sum x_i}{n} = x_{sr} \quad \frac{\sum y_i}{n} = y_{sr}$$

- gde su x_{sr} i y_{sr} odgovarajuće srednje vrednosti to se prethodni izraz za koeficijent b može napisati u obliku:

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n x_{sr} y_{sr}}{\sum x_i^2 - n x_{sr}^2}$$

- Koeficijent a može se sada izračunati pomoću izraza:

$$a = y_{sr} - b x_{sr}$$

- Poslednje dve jednačine daju vrednosti koeficijenata prave koja optimalno fituje set od n izmerenih tačaka.

3.6.1.1. Primer linearne regresije

- Prilikom merenja električnog otpora sijalice, dobijeni su sledeći rezultati za električnu otpornost i struju sijalice, dati u tabeli.

I [mA]	114	145	178	216	248
R [Ω]	433	552	674	787	827

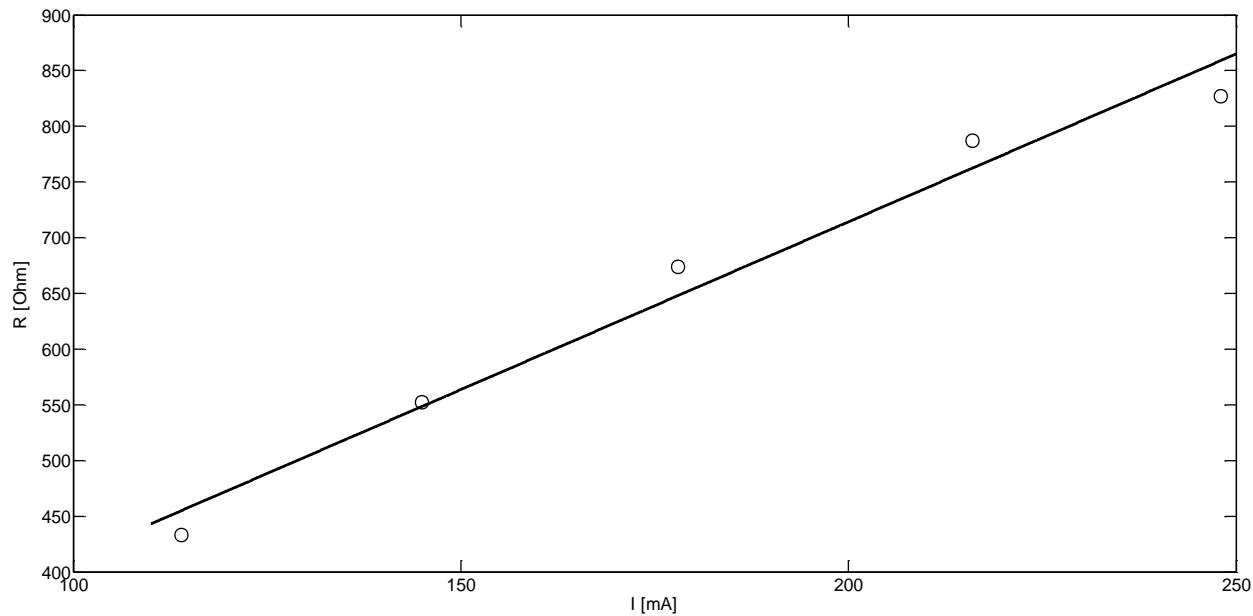
- Potrebno je odrediti koeficijente prave $R = a + bI$ kojom se optimalno fituju izmereni podaci.
- Koeficijenti prave odrediće se primenom linearne regresije uz princip minimizacije sume kvadrata odstupanja.
- Koeficijenti a i b dobijaju se primenom odgovarajućih jednačina:

$$b = \frac{\sum I_i R_i - n I_{sr} R_{sr}}{\sum I_i^2 - n I_{sr}^2} = \frac{624462 - 5 \cdot 180.2 \cdot 654.6}{173865 - 5 \cdot 180.2^2} = 3.0133 \Omega / A$$

$$a = R_{sr} - b I_{sr} = 654.6 - 3.0133 \cdot 180.2 = 111.6036 \Omega$$

3.6.1.1. Primer linearne regresije

- Znači jednačina prave kojom se najbolje fituju izmerene tačke je $R = 111.6036 + 3.0133I$. Izmerene tačke i dobijena prava date su na slici:



3.6.2. Kvadratna regresija

- Kvadratna regresija se koristi za određivanje koeficijenata relacije $y=a+bx+cx^2$ između dva skupa mernih podataka y_1, \dots, y_n i x_1, \dots, x_n .
- Odstupanje neke od merenih tačaka od kvadratne krive može se izraziti jednačinom:

$$d_i = y_i - (a + bx_i + cx_i^2)$$

- Kao i kod linearne regresije, najbolja linija za fitovanje izmerenih tačaka dobija se kada je suma kvadrata odstupanja minimalna.
- Drugim rečima potrebno je naći minimum sume:

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2$$

- Kao i kod linearne regresije, minimum sume S se dobija izjednačavanjem parcijalnih izvoda $\partial S/\partial a$, $\partial S/\partial b$ i $\partial S/\partial c$ sa nulom i rešavanjem dobijenog sistema od 3 jednačine.
- Princip rešavanja datog sistema je isti kao u slučaju linearne regresije samo što je složeniji zbog činjenice da se imaju 3 jednačine sa 3 nepoznate.

3.6.3. Fitovanje krivih primenom programskog paketa Matlab

- Programski paket Matlab može da se upotrebi za fitovanje krivih. U nastavku je dat jednostavni kod za fitovanje izmerenih podataka, polinomom n -tog reda.

```
% Program za fitovanje merenih podataka

% Izmereni podaci
X=[1 3 5 7 9];
Y=[2 4 5 8 10];

% Odredjivanje koeficijenata polinoma
P=polyfit(X,Y,1); % Za linearnu je 1, kvadratnu 2, itd

% Kreiranje tacaka na osnovu koeficijenata
X1=0:0.1:10;
Y1=polyval(P,X1);

% Crtanje tacaka i fitovane krive
hold on
plot(X,Y,'ko') % crtanje tacaka
plot(X1,Y1,'k') % crtanje krive
hold off

% Oznake osa
xlabel('X');
ylabel('Y');
```

3.6.3. Fitovanje krivih primenom programskog paketa Matlab

- Matlab omogućava fitovanje krivih i bez pisanja koda pošto kod prikaza grafika postoji alat koji to omogućava. Potrebno je formirati graf sa merenim tačkama. Na primer komandama:

```
% Izmereni podaci  
X=[1 3 5 7 9];  
Y=[2 4 5 8 10];  
  
plot(X,Y,'ko') % crtanje tacaka
```

formira se poseban prozor sa grafikom na kome su prikazane merene tačke. Klikom na opciju *tools* u padajućem meniju se izabere opcija *basic fitting*.

- Dalje je potrebno izabrati tip krive kojom će se izvršiti fitovanje. Na grafiku može i da se ispiše i analitički izraz za fitovanu krivu.
- Moguće je dobiti i grafik koji prikazuje i odstupanja pojedinih tačaka od krive.

3.7. Prezentacija merenih podataka

- Mereni podaci se mogu prezentovati na dva načina bilo da se radi o predstavi na papiru ili na računaru.
- Ta dva načina su tabelarni i grafički prikaz.
- Nekada je praktičniji jedan način, a u nekim slučajevima drugi.
- Ponekad je kombinacija ova dva načina prezentovanja najbolje rešenje.

3.7.1. Tabelarna predstava podataka

- Kod ovakve predstave u tabelu se upisuju tačno oni podaci koji su dobijeni merenjem. Pored njih u tabela može da sadrži i podatke koji su dobijeni proračunom na osnovu merenih podataka.
- Kod formiranja tabele sa podacima moraju se poštovati određena pravila:
 1. Tabela mora da ima takav naslov koji jasno i nedvosmisleno opisuje njen sadržaj. Naslov tabele po pravilu treba da se nalazi iznad same tabele.
 2. Svaka kolona treba da sadrži podatke koji se odnose na samo jednu veličinu bilo da je ona merena ili izračunata.
 3. Svaka kolona treba da ima svoj naziv koji se odnosi na podatke u njoj.
 4. Jedinice merene veličine treba da stoje ne vrhu kolone i to uglavnom kod naziva kolone.
 5. U cilju što jasnijeg i preglednijeg prikaza podataka kolone i vrste u tabeli mogu se razdvojiti linijama.
 6. Po mogućstvu potrebno je navesti opseg greške za svaki od podataka u tabeli, odnosno za svaku kolonu sa podacima.

3.7.2. Grafička predstava podataka

- Grafička predstava podataka uvodi neke kompromise po pitanju tačnosti sa kojom su podaci izmereni (snimljeni).
- Grafičkom predstavom gube se tačne vrednosti dobijene merenjem.
- Međutim, grafička predstava ima značajne prednosti u odnosu na tabelarnu predstavu podataka.
 1. Grafička prezentacija podataka je znatno preglednija od tabelarne predstave.
 2. Grafička predstava može da jasno prikaže zavisnost između izmerenih podataka.
 3. Grafička predstava može jasno da ukaže na to da li je neka merena tačka van krive kojom se fituju izmerene vrednosti. Ovo može da ukaže na to da je takva tačka posledica neke greške pri merenju.

3.7.2. Grafička predstava podataka

- I kod grafičke predstave podataka takođe se moraju poštovati određena pravila:
 1. Graf mora da ima naziv koji opisuje šta podaci prikazani na grafu predstavljaju.
 2. Obe ose na grafu treba da budu označene i da jasno opisuju šta promenljive na pojedinim osama predstavljaju. Obavezno je i navođenje jedinica za merene veličine.
 3. Broj numeričkih oznaka duž osa treba da bude razumno veliki. Na primer 5, 6 oznaka po jednoj osi je prava mera.
 4. Graf ne bi trebalo crtati previše izvan granica koje odgovarajau minimalnoj i maksimalnoj izmerenoj vrednosti.