

Тржиште електричне енергије и дерегулација – збирка решених задатака –

Приредио: Владимир Антонијевић

v1.0 — 06.09.2025.

Садржај

2	Основни појмови из економије	2
3	Тржишта за електричну енергију	19
4	Учешће на тржиштима електричне енергије	41
5	Сигурност система и помоћне услуге	60
6	Преносна мрежа и тржиште електричне енергије	64

2 Основни појмови из економије

Задатак 2.1

Произвођач процењује да су његови варијабилни трошкови за производњу датог производа одређени следећим изразом:

$$C(q) = 25q^2 + 2000q \quad [\$]$$

где је C укупни трошак, а q количина произведених јединица.

- а) Известити израз за маргинални трошак производње.
- б) Известити изразе за приход и добит (профит) када се производ продаје по цени једнакој маргиналном трошку производње.

Решење

Дато је:

$$C(q) = 25q^2 + 2000q.$$

- а) Маргинални трошак производње је први извод укупног трошка по количини q :

$$MC(q) = \frac{dC}{dq} = 50q + 2000.$$

- б) Продајна цена по јединици је $p(q) = MC(q) = 50q + 2000$. Приход је

$$R(q) = p(q)q = (50q + 2000)q = 50q^2 + 2000q.$$

Добит је

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = (50q^2 + 2000q) - (25q^2 + 2000q) = 25q^2.$$

Коначни резултати.

$MC(q) = 50q + 2000,$	$R(q) = 50q^2 + 2000q,$	$\Pi(q) = 25q^2$
-----------------------	-------------------------	------------------

Задатак 2.2

Обрнута (инверзна) функција потражње за групу потрошача за дати тип производа дата је изразом:

$$\pi(q) = -10q + 2000 \quad [$/јед.]$$

где је q тражња (количина), а π јединична цена овог производа.

- Одредити максималну потрошњу ових потрошача.
- Одредити цену коју ниједан потрошач није спреман да плати за овај производ.
- Одредити максимални бруто потрошачки суфицит. Објаснити зашто потрошачи неће моћи да остваре тај суфицит.
- За цену $\pi = 1000$ \$/јед. израчунати потрошњу, бруто потрошачки суфицит, приход произвођача и нето потрошачки суфицит.
- Ако цена π порасте за 20%, израчунати промену потрошње и промену прихода који прикупљају произвођачи.
- Колика је ценовна еластичност изражње за овај производ (за ову групу потрошача) када је $\pi = 1000$ \$/јед.?

Решење

Из инверзне функције потражње добијамо директну потражњу:

$$q(\pi) = \frac{2000 - \pi}{10}, \quad \frac{dq}{d\pi} = -\frac{1}{10}.$$

- Одредити максималну потрошњу ових потрошача.

Инверзна функција потражње може се представити правом линијом са негативним нагибом (као на графику).

Максимална потрошња q_{\max} се постиже када је $\pi = 0$ [\$/јед.]. Из инверзне функције потражње добијамо:

$$0 = -10q + 2000 \Rightarrow q_{\max} = 200 \text{ јед.}$$

- Одредити цену коју ниједан потрошач није спреман да плати за овај производ.

Цена коју ниједан потрошач није спреман да плати је таква да се ниједна јединица не прода:

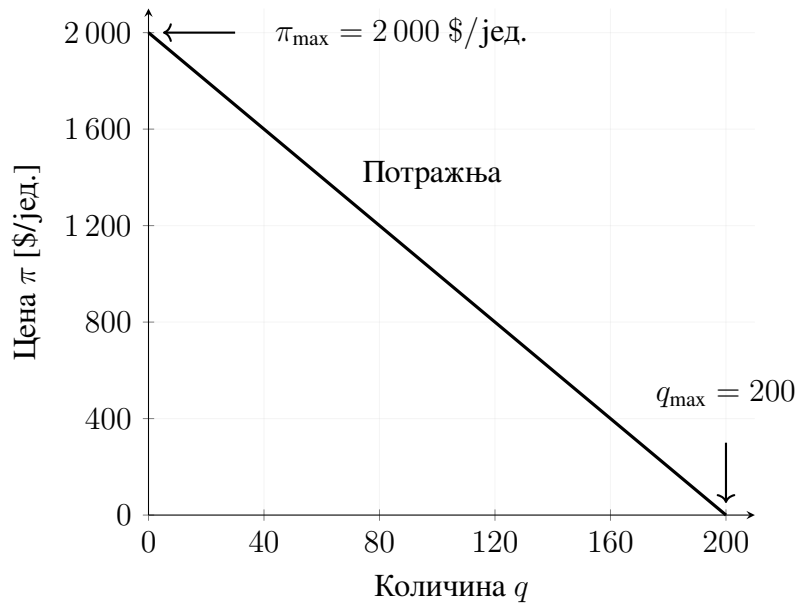
$$\pi = -10 \times 0 + 2000 = 2000 \text{ $/јед.}$$

- Одредити максимални бруто потрошачки суфицит. Објаснити зашто потрошачи неће моћи да остваре тај суфицит.

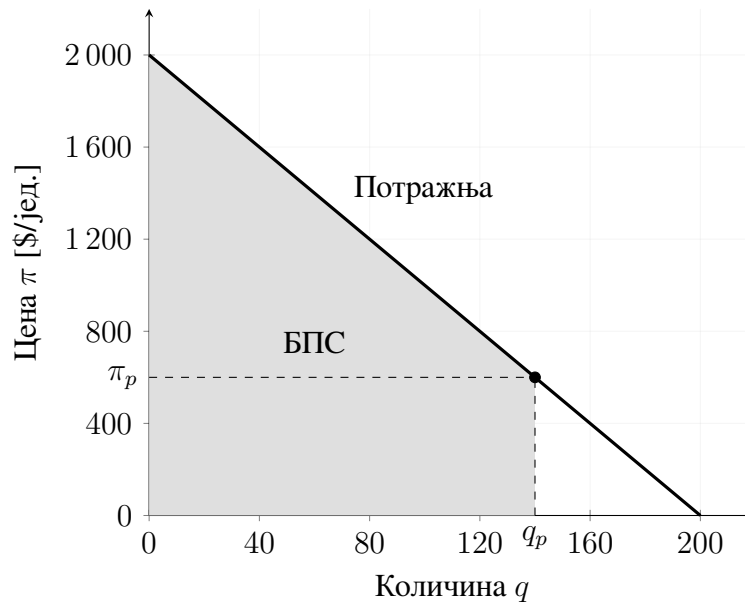
Пошто површина испод инверзне функције потражње представља потрошачки суфицит, овај суфицит ће бити максималан када је та површина максимална. То се дешава када је количина продатих јединица максимална ($q = q_{\max}$, $\pi = 0$). Дакле,

$$\text{бруто потрошачки суфицит} = \text{БПС} = \frac{q_{\max} \pi_{\max}}{2} = \frac{200 \times 2000}{2} = 200\,000 \text{ $}.$$

Овај суфицит није остварив јер ниједан рационалан произвођач не би био спреман да „продаје” по цени 0 \$/јед..



Слика 1: Задатак 2.2 (а): Инверзна функција потражње.



Слика 2: Задатак 2.2 (в): Произвольна тачка (q_p, π_p) и бруто потрошачки суфицит.

г) За цену $\pi = 1\,000$ \$/јед. израчунајте и профит, бруто потрошачки суфицит, приход произвођача и нето потрошачки суфицит.

За цену $\pi_t = 1\,000$ \$/јед. број продатих јединица је:

$$q_t = \frac{2000 - 1000}{10} = 100 \text{ јед.}$$

Површина A је једнака:

$$A = \frac{q_t \times (\pi_{\max} - \pi_t)}{2} = \frac{100 \times 1000}{2} = 50\,000 \text{ $}.$$

Површина B је једнака:

$$B = q_t \times \pi_t = 100 \times 1000 = 100\,000 \text{ \$}.$$

Зато је бруто потрошачки суфицит дат сумом површина A и B :

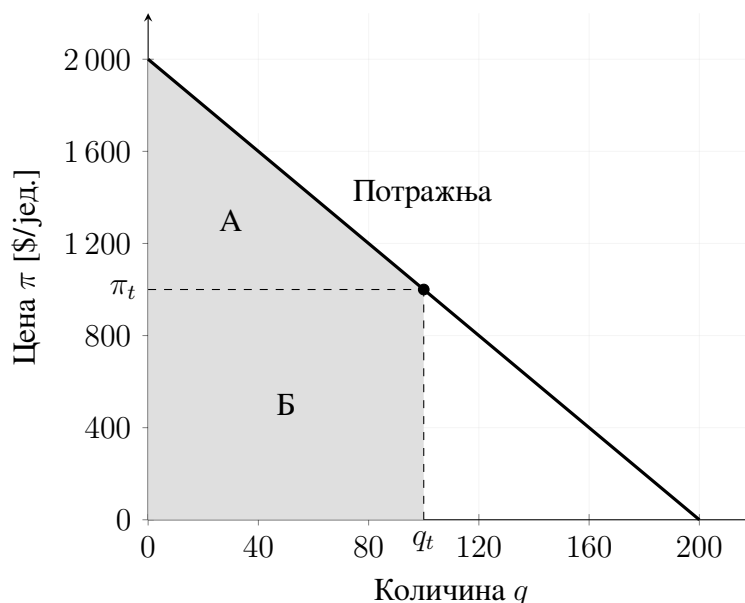
$$БПС = A + B = 150\,000 \text{ \$}.$$

Приход који остварују произвођачи једнак је површини B :

$$ПП = B = 100\,000 \text{ \$}.$$

Нето потрошачки суфицит једнак је површини A :

$$НПС = A = 50\,000 \text{ \$}.$$



Слика 3: Задатак 2.2 (г): тачка $(q_t, \pi_t) = (100, 1000)$ и бруто потрошачки суфицит.

- д) Ако цена π порасне за 20%, израчунајте промену потрошње и промену прихода који прикућују произвођачи.

Повећање цене за 20% значи $\pi' = 1\,200$ \$/јед.. Нова количина је:

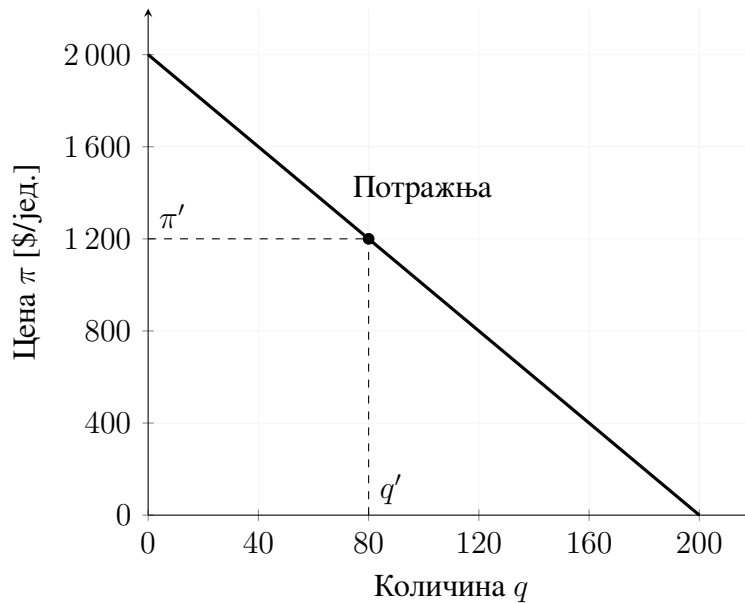
$$q' = \frac{2000 - 1200}{10} = 80 \text{ јед.}$$

Приход произвођача је $80 \times 1\,200 \text{ \$} = 96\,000 \text{ \$}$. Дакле, промена потрошње је $80 - 100 = -20$ јединица, а промена прихода је $96\,000 - 100\,000 = -4\,000 \text{ \$}$.

- ђ) Колика је ценовна еластичност потražње за овај производ (за ову групу потрошача) када је $\pi = 1000$ \$/јед.?

Еластичност потražње представља меру осетљивости тражене количине добра на промену његове цене. Дефинише се као:

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{d\pi}{\pi}} = \frac{dq}{d\pi} \cdot \frac{\pi}{q}$$



Слика 4: Задатак 2.2 (д): тачка $(q', \pi') = (80, 1200)$.

Из инверзне функције потражње знамо да је $q = (2000 - \pi)/10$, па је $dq/d\pi = -1/10$. Како је $\pi = 1000$ \$/јед. за $q = 100$ јединица,

$$\varepsilon = \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1000}{100} = -1.$$

Тумачење:

- Ако је $|\varepsilon_d| > 1 \rightarrow$ потражња је *еласћична* (тражена количина релативно више реагује на промену цене),
- Ако је $|\varepsilon_d| < 1 \rightarrow$ потражња је *нееласћична* (тражена количина релативно мање реагује на промену цене),
- Ако је $\varepsilon_d = -1 \rightarrow$ потражња је *јединично еласћична*.

Примери:

- *Еласћична потражња:* луксузни производи као што су накит, путовања на егзотичне дестинације или врхунска електроника – промена цене може знатно променити тражену количину.
- *Нееласћична потражња:* основне животне намирнице и добара као што су хлеб, со или лекови – промена цене слабо утиче на тражену количину.

Задатак 2.3

Економисти процењују да је *инверзна функција понуде* на тржишту вицета дата изразом:

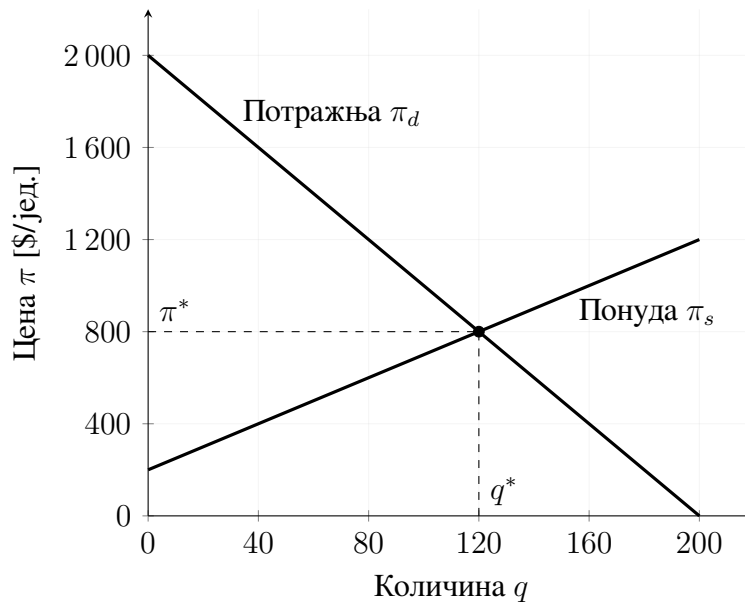
$$\pi_s(q) = 5q + 200 \quad [\$/\text{јед.}]$$

а *инверзна функција потражње* је као у задатку 2.2:

$$\pi_d(q) = -10q + 2000 \quad [\$/\text{јед.}]$$

- Израчунај тражњу и цену при *тржишној равнотежи*.
- За ту равнотежу израчунај: *бруто потрошачки суфицит*, *нето потрошачки суфицит*, *приход произвођача*, *профит произвођача* и *укупну економску добит* (*global welfare*).

Решење



Слика 5: Задатак 2.3: Равнотежна тачка $(q^*, \pi^*) = (120, 800)$.

- Полазимо од $\pi_d(q) = -10q + 2000$ и $\pi_s(q) = 5q + 200$. Равнотежа је када је $\pi_d(q) = \pi_s(q)$:

$$5q + 200 = -10q + 2000 \implies 15q = 1800 \implies q^* = 120.$$

Равнотежна цена је

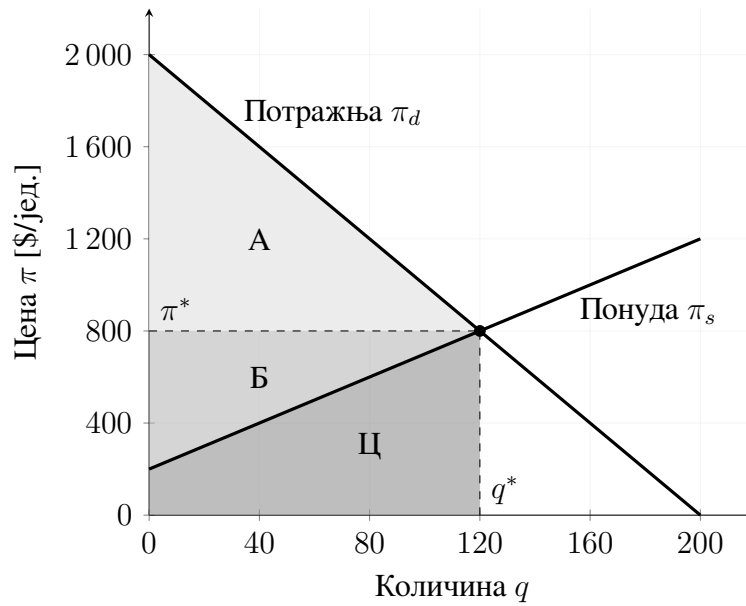
$$\pi^* = \pi_s(120) = 5 \cdot 120 + 200 = 800 \text{ \$/јед.}$$

- Бруто потрошачки суфицит*:

$$\text{БПС} = \int_0^{q^*} (-10q + 2000) dq = [-5q^2 + 2000q]_0^{120} = 168\,000 \$ = \boxed{\text{А} + \text{Б} + \text{Ц}}$$

Приход произвођача:

$$\text{ПП} = \pi^* q^* = 800 \cdot 120 = 96\,000 \$ = \boxed{\text{Б} + \text{Ц}}$$



Слика 6: Равнотежна тачка $(q^*, \pi^*) = (120, 800)$ и области А, Б, Ц.

Нејто њојрошачки суфициј:

$$\text{НПС} = \text{БПС} - \text{ПП} = 168\,000 - 96\,000 = 72\,000 \$ = \boxed{\text{А}}$$

Варијабилни њрошак њроизвођача:

$$\text{ВТ} = \int_0^{q^*} (5q + 200) dq = [2,5q^2 + 200q]_0^{120} = 60\,000 \$ = \boxed{\text{Ц}}$$

Профити (добити) њроизвођача:

$$\text{ДП} = \text{ПП} - \text{ВТ} = 96\,000 - 60\,000 = 36\,000 \$ = \boxed{\text{Б}}$$

Укупна економска добити - друштвено блајосијање (енгл. *global welfare*):

$$\text{ДБ} = \text{НПС} + \text{ДП} = 72\,000 + 36\,000 = 108\,000 \$ = \boxed{\text{А} + \text{Б}}$$

Задатак 2.4

Израчунати утицај на тржишну равнотежу из задатка 2.3 следећих интервенција:

- Минимална цена од 900 \$/јед.
- Максимална цена од 600 \$/јед.
- Порез на продају од 450 \$/јед.

За сваку наведену интервенцију израчунати: тржишну цену, количину која се размењује, нето потрошачки суфицит, профит (добит) произвођача и укупну економску добит. Илустровати поступак дијаграмима.

Решење

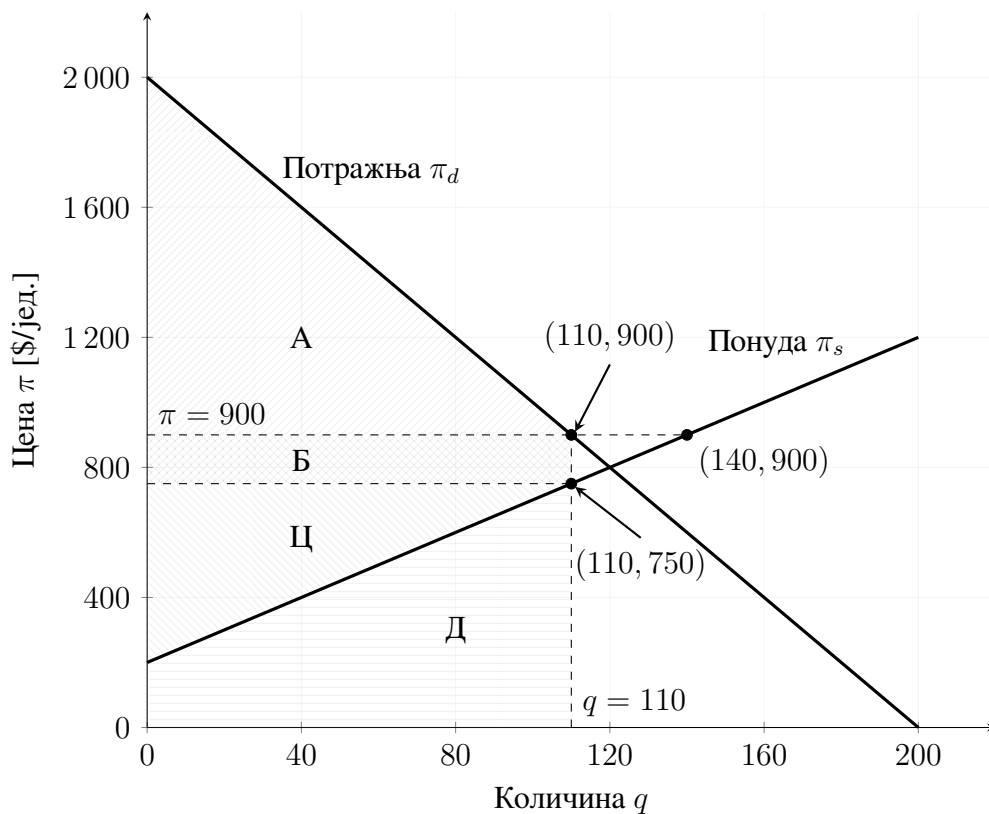
Полазимо од инверзне функције изражње $\pi_d(q) = -10q + 2000$ и функције понуде $\pi_s(q) = 5q + 200$.

а) Минимална цена од 900 \$/јед. Количина која се тражи при овој цени из потражње је:

$$q = \frac{2000 - 900}{10} = 110.$$

Нето потрошачки суфицит (површина А - изнад цене до криве потражње):

$$\text{НПС} = \frac{110(2000 - 900)}{2} = 60\,500 \$.$$



Слика 7: Ефекат минималне цене од 900 \$/јед.

Цена по којој су произвођачи спремни да продају 110 јединица (без интервенције) из понуде је $\pi_s(110) = 5 \cdot 110 + 200 = 750$ \$/јед.. Профит (добит) произвођача (површине Б и Ц):

$$\text{ДП} = \frac{110(750 - 200)}{2} + 110(900 - 750) = 46\,750 \text{ \$}.$$

Укупна економска добит – друштвено благостање (површине А, Б и Ц):

$$\text{ДБ} = \text{НПС} + \text{ДП} = 107\,250 \text{ \$}.$$

б) Максимална цена од 600 \$/јед. Количина се добија из понуде (колико су произвођачи спремни да испоруче по цени од 600 \$/јед.):

$$q = \frac{600 - 200}{5} = 80.$$

Цена коју би потрошачи били спремни да плате за ову количину (без интервенције) из потражње је $\pi_d(80) = -10 \cdot 80 + 2000 = 1200$ \$/јед. Нето потрошачки суфицит (површине А и Б):

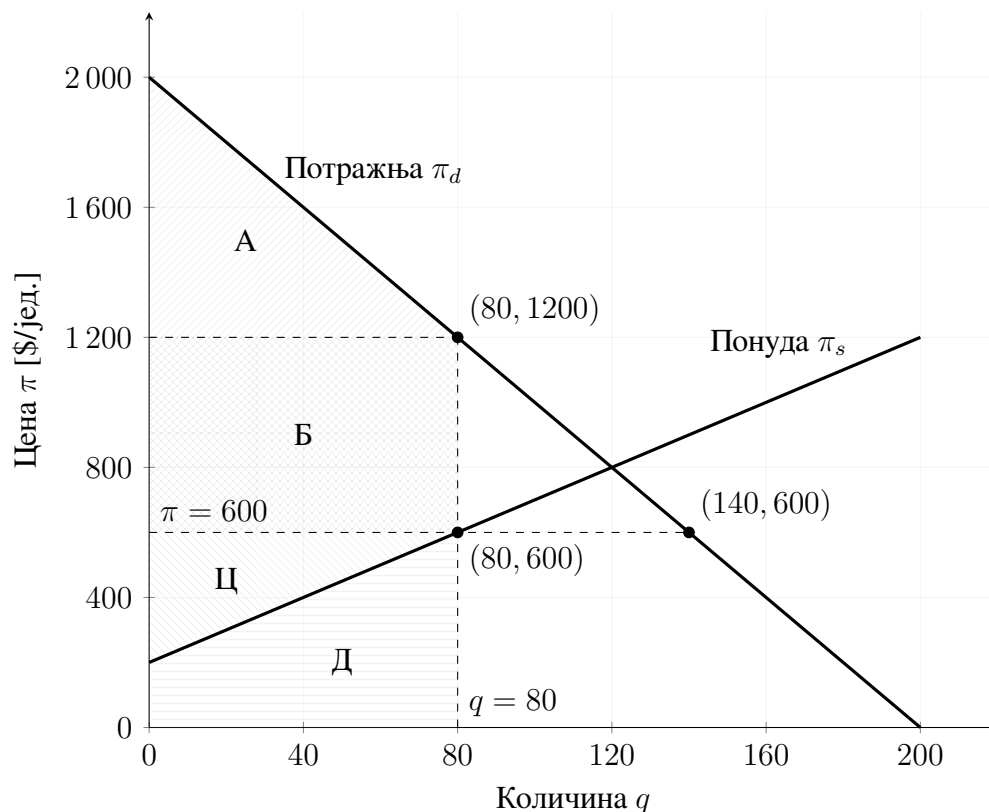
$$\text{НПС} = \frac{80(2000 - 1200)}{2} + 80(1200 - 600) = 80\,000 \text{ \$}.$$

Профит произвођача (површина Ц):

$$\text{ДП} = \frac{80(600 - 200)}{2} = 16\,000 \text{ \$}.$$

Укупна економска добит – друштвено благостање (површине А, Б и Ц):

$$\text{ДБ} = \text{НПС} + \text{ДП} = 96\,000 \text{ \$}.$$



Слика 8: Ефекат максималне цене од 600 \$/јед.

в) Порез на продају од 450 \$/јед. Порез помера понуду нагоре за 450 \$, па је равнотежа дата једначином:

$$5q + 200 + 450 = -10q + 2000 \implies q = \frac{2000 - 650}{15} = 90.$$

Тржишна цена коју плаћа потрошач (из потражње) је $\pi_d(90) = 1100$ \$/јед. док произвођач нето прима $1100 - 450 = 650$ \$/јед. Нето потрошачки суфицит (површина А):

$$\text{НПС} = \frac{90(2000 - 1100)}{2} = 40\,500 \text{ \$}.$$

Профит (добит) произвођача (површина Б):

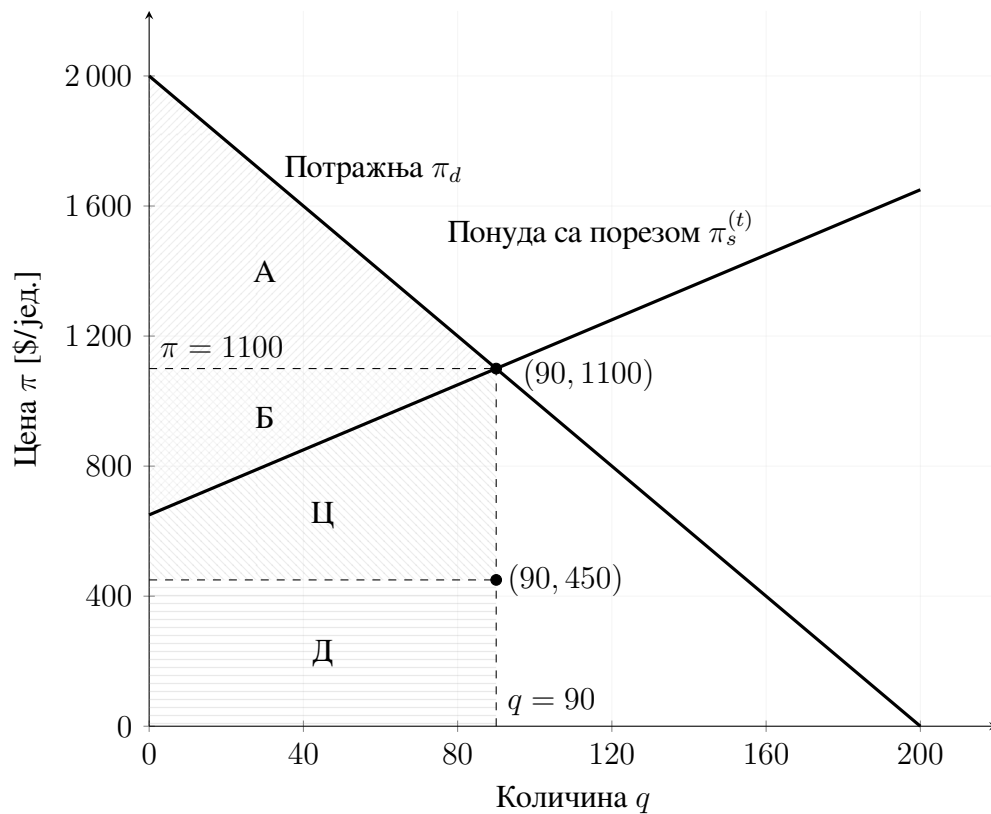
$$\text{ДП} = \frac{90(1100 - 650)}{2} = 20\,250 \text{ \$}.$$

Порески приход (површина Д):

$$\text{ПоПр} = 90 \cdot 450 = 40\,500 \text{ \$}.$$

Укупна економска добит – друштвено благостање (површине А, Б и Д):

$$\text{ДБ} = \text{НПС} + \text{ДП} + \text{ПоПр} = 101\,250 \text{ \$}.$$



Слика 9: Порез на продају $t = 450$ \$: нова понуда $\pi_s^{(t)} = 5q + 650$.

Задатак 2.5

Крива потражње за једним производом процењена је изразом:

$$q = 200 - \pi.$$

Израчунати цену и *ценовну еластичност потражње* за следеће вредности тражње:

$$q \in \{0, 50, 100, 150, 200\}.$$

Поновити ове прорачуне за случај када је крива потражње дата изразом:

$$q = \frac{10\,000}{\pi}.$$

Решење

Дефиниција еластичности. Ценовна еластичност потражње дефинише се као

$$\varepsilon = \frac{\frac{dq}{d\pi}}{\frac{q}{\pi}} = \frac{dq}{d\pi} \cdot \frac{\pi}{q}.$$

(а) Потражња $\pi = 200 - q$. Пошто важи $q = 200 - \pi$, добијамо $\frac{dq}{d\pi} = -1$, па је

$$\varepsilon = \frac{dq}{d\pi} \cdot \frac{\pi}{q} = -\frac{\pi}{q}.$$

За тражене вредности q важи $\pi = 200 - q$, те следи табела:

q (јед.)	π (\$/јед.)	ε
0	200	$-\infty$
50	150	-3
100	100	-1
150	50	$-\frac{1}{3}$
200	0	0

(б) Потражња $q = \frac{10\,000}{\pi}$. Овде је $\frac{dq}{d\pi} = -\frac{10\,000}{\pi^2}$, па еластичност износи

$$\varepsilon = \frac{dq}{d\pi} \cdot \frac{\pi}{q} = -\frac{10\,000}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{q} = -\frac{10\,000}{\pi q}.$$

Како је $q = \frac{10\,000}{\pi}$, добијамо $\varepsilon = -1$ за сваку комбинацију (q, π) , тј. потражња је константно јединично еластична. Нумерички резултати:

q (јед.)	π (\$/јед.)	ε
0	∞	-1
50	200	-1
100	100	-1
150	200/3	-1
200	50	-1

Задатак 2.6

Вертикално интегрисане електроенергетске компаније често нуде двотарифно снабдевање како би подстакле потрошаче да преместе потрошњу са периода вршног оптерећења на ванвршне периоде. Потрошња електричне енергије у вршном и у ванвршном периоду могу се посматрати као *суисџијуџи*. Табела даје резултате експеримената спроведених уз двотарифни систем. На основу ових резултата проценити *соисџивене еласџичносџи* и *међусобне еласџичносџи* потрошње у вршном и у ванвршном периоду.

	π_1 [\$/MWh]	π_2 [\$/MWh]	D_1 [MWh]	D_2 [MWh]
Полазни случај	0,08	0,06	1000	500
Експеримент 1	0,08	0,05	992	509
Експеримент 2	0,09	0,06	985	510

Решење

Нека је производ 1 „потрошња у вршном периоду”, а производ 2 „потрошња у ванвршном периоду”. Еластичност дефинишемо као

$$\varepsilon_{ji} = \frac{\frac{\Delta D_j}{D_j}}{\frac{\Delta \pi_i}{\pi_i}},$$

где проматрамо промене између полазног случаја и релевантног експеримента.

- а) **Сопствена еластичност вршне потрошње** (ε_{11}): пореди се полазни случај и експеримент 2 (мења се π_1).

$$\Delta D_1 = 985 - 1000 = -15, D_1 = 1000; \Delta \pi_1 = 0,09 - 0,08 = 0,01, \pi_1 = 0,08.$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{-15/1000}{0,01/0,08} = -0,120.$$

- б) **Сопствена еластичност ванвршне потрошње** (ε_{22}): пореди се полазни случај и експеримент 1 (мења се π_2).

$$\Delta D_2 = 509 - 500 = 9, D_2 = 500; \Delta \pi_2 = 0,05 - 0,06 = -0,01, \pi_2 = 0,06.$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{9/500}{-0,01/0,06} = -0,108.$$

- в) **Међусобна еластичност утицаја цене ванвршног периода на вршну тражњу** (ε_{12}): полазни случај : експеримент 1.

$$\Delta D_1 = 992 - 1000 = -8, D_1 = 1000; \Delta \pi_2 = 0,05 - 0,06 = -0,01, \pi_2 = 0,06.$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{-8/1000}{-0,01/0,06} = 0,048.$$

- г) **Међусобна еластичност утицаја цене вршног периода на ванвршну тражњу** (ε_{21}): полазни случај : експеримент 2.

$$\Delta D_2 = 510 - 500 = 10, D_2 = 500; \Delta \pi_1 = 0,09 - 0,08 = 0,01, \pi_1 = 0,08.$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{10/500}{0,01/0,08} = 0,160.$$

Резиме.

$$\varepsilon_{11} = -0,120, \quad \varepsilon_{22} = -0,108, \quad \varepsilon_{12} = +0,048, \quad \varepsilon_{21} = +0,160.$$

Негативне сопствене еластичности су у складу са законом тражње; позитивне међусобне еластичности указују да су вршна и ванвршна потрошња *субституибуил* на тржишту.

Задатак 2.7

Показати да је маргинални трошак производње једнак просечном трошку производње за ону количину производње која минимизује просечни трошак.

Решење

Нека је $c(y)$ укупни трошак производње количине y . Просечни трошак је

$$AC(y) = \frac{c(y)}{y},$$

а маргинални трошак је

$$MC(y) = \frac{dc(y)}{dy}.$$

За минимум $AC(y)$ неопходан услов је $\frac{d}{dy}AC(y) = 0$. Налажењем првог извода функције $AC(y) = c(y)/y$ добијамо

$$\frac{d}{dy}AC(y) = \frac{y c'(y) - c(y)}{y^2} = 0 \implies y c'(y) - c(y) = 0 \implies c'(y) = \frac{c(y)}{y}.$$

Како је $c'(y) = MC(y)$ и $\frac{c(y)}{y} = AC(y)$, следи

$$\boxed{MC(y) = AC(y)}$$

за ону количину y која минимизује $AC(y)$.

Задатак 2.8

Краткорочна функција трошка предузећа за производњу вицета дата је изразом:

$$C(y) = 10y^2 + 200y + 100000.$$

- а) Израчунати опсег производње у коме је профитабилно производити ако се сваки вицет продаје по цени 2400 \$/јед.. Одредити производњу која максимизује профит.
- б) Поновити прорачун и објаснити резултате ако је краткорочна функција трошка:

$$C(y) = 10y^2 + 200y + 200000.$$

Решење

Да би продаја била профитабилна, просечни трошак мора бити мањи од тржишне цене.

а)

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y} = 10y + 200 + \frac{100000}{y}.$$

Једначењем са тржишном ценом 2400 \$/јед. добијамо:

$$2400 = 10y + 200 + \frac{100000}{y} \iff 10y^2 - 2200y + 100000 = 0.$$

Квадратна једначина даје решења $y_1 = 155,82$ и $y_2 = 64,17$, па је профитабилан опсег

$$65 \leq y \leq 155 \quad (\text{заокружено}).$$

Производња која максимизује профит добија се из $MC(y) =$ цена. Пошто је

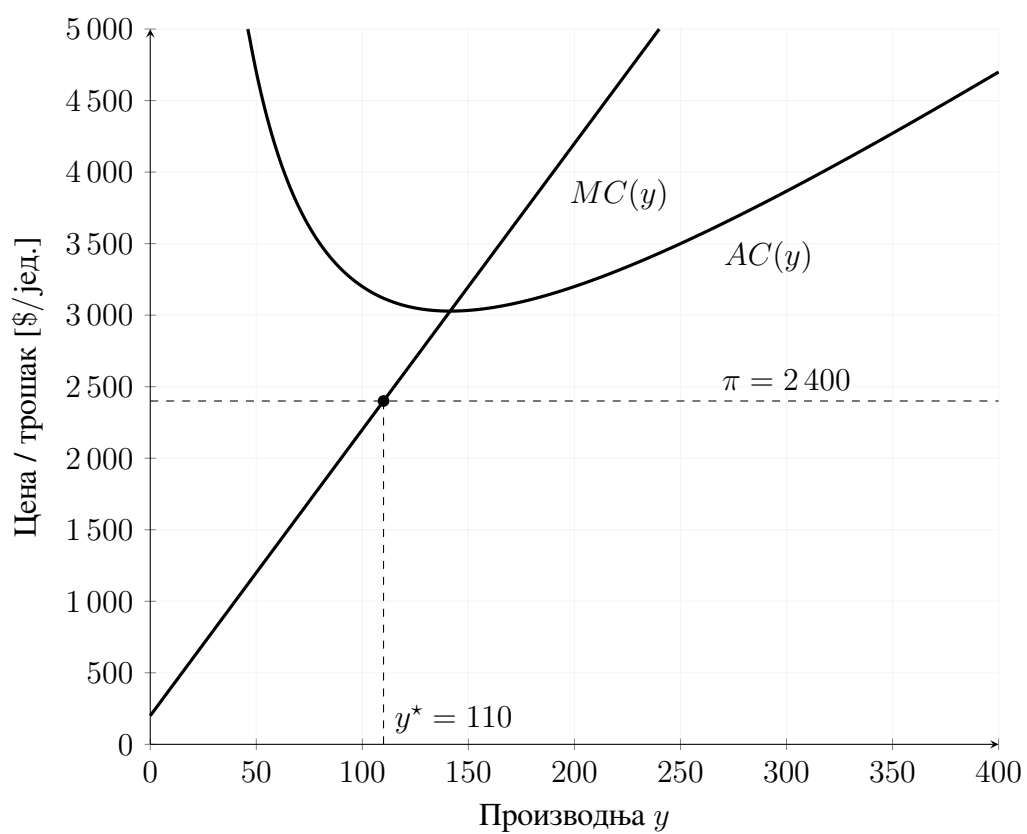
$$MC(y) = \frac{dC}{dy} = 20y + 200,$$

следи $20y + 200 = 2400 \Rightarrow y^* = 110$. Ова вредност је унутар профитабилног опсега, па је оптимална производња профитабилна.

б)

$$AC(y) = 10y + 200 + \frac{200000}{y}.$$

Једначењем $AC(y) = 2400$ добија се $10y^2 - 2200y + 200000 = 0$, што нема реална решења (дискриминанта је негативна). Дакле, *ниједан* ниво производње није профитабилан (просечни трошак је увек изнад тржишне цене). Ипак, услов за „оптималну“ производњу (који минимизује губитак) остаје $MC(y) = 2400$, па је и у овом случају $y^* = 110$; то је ниво који минимизује *просечни губитак*.



Слика 10: Случај б): $AC(y)$ је изнад тржишне цене за свако y ; $y^* = 110$ минимизује просечни губитак.

3 Тржишта за електричну енергију

Речник појмова

Дугорочни уговор (*енгл. long-term contract*) Директан договор између два учесника (нпр. произвођача и добављача) да се испоручује фиксна снага/енергија по унапред договореној цени у одређеним часовима (нпр. вршни/ванвршни) и у одређеном периоду (месец, година...). Нема стандардне берзанске форме; услови су прилагођени потребама страна.

Форвард уговор (*енгл. forward contract*) Двострани *термински уговор* ван берзе (*енгл. OTC - Over-the-counter*). Дефинише количину Q (MW/MWh), цену K (\$/MWh) и датум/сат испоруке. Обрачун се врши на датум доспећа (обично једнократно). За продавца је профит/губитак:

$$\Pi_{\text{forward}} = Q (K - P_{\text{spot}}),$$

где је P_{spot} спот цена у часу испоруке. Позитиван знак значи добит за продавца (када је $P_{\text{spot}} < K$).

Фјучерс уговор (*енгл. futures contract*) *Стандардизован термински уговор* којим се тргује на берзи. Има фиксне стандарде (јединица уговора, сат/дан испоруке, место, квалитет), клириншку кућу и *дневни* обрачун добитака/губитака. Интуитивно: исто економско значење као форвард, али са мањим кредитним ризиком и већом ликвидношћу.

Опција куповине - кол опција (*енгл. call option*) Финансијски инструмент који даје *право*, али не и обавезу, да се **купи** енергија по цени извршења K у задатом часу/периоду. Ако је спот цена P_{spot} виша од K , опција се **реализује**:

$$\text{исплата} = Q \cdot \max(0, P_{\text{spot}} - K).$$

Уз ово, купац опције плаћа **премију** (видети доле). Корисно за заштиту од *распа* цена.

Опција продаје - пут опција (*енгл. put option*) Даје *право*, али не и обавезу, да се **прода** енергија по цени извршења K . Ако је P_{spot} нижа од K , опција се **реализује**:

$$\text{исплата} = Q \cdot \max(0, K - P_{\text{spot}}).$$

Купац плаћа **премију**. Корисно за заштиту од *пада* цена.

Цена извршења (*енгл. strike price, K*) Гранична цена на којој носилац опције почиње да остварује исплату. За кол опцију „у новцу“ ако је $P_{\text{spot}} > K$; за пут опцију ако је $P_{\text{spot}} < K$.

Премија опције Износ (нпр. \$ или \$/MWh) који купац опције плаћа продавцу за само право избора. Премија се плаћа без обзира да ли ће се опција *реализовати*. У коначном профиту:

$$\Pi_{\text{опција}} = \text{исплата} - \text{премија}.$$

Уговор о разлици (енгл. *contract for difference — CfD*) Финансијски уговор у коме стране не испоручују енергију већ поравнавају разлику између референтне цене (обично спот цене) и договорене (уговорне) цене K за договорену количину и период. CfD је **хеџинг инструмент**: хеџинг (енгл. *hedging*) значи унапред фиксирање/закључавање цена ради смањења ризика од њихових промена, тако што се варијабилна тржишна цена $\pi_{\text{реф},t}$ ефективно „своди“ на унапред договорену K , чиме се омогућава планирање прихода једној страни („кратка страна“). Нека су Q_t (MWh у периоду t), K (\$/MWh — „цена уговора“) и $\pi_{\text{реф},t}$ (нпр. спот/MCP у периоду t). Тада су исплате:

$$\Pi_{\text{CfD,long}} = Q_t \cdot (\pi_{\text{реф},t} - K), \quad \Pi_{\text{CfD,short}} = Q_t \cdot (K - \pi_{\text{реф},t}).$$

Дуга страна (long) профитира када је $\pi_{\text{реф},t} > K$, а губи у супротном. CfD је *чисто финансијски* (без премије као код опција) и типично се поравнава по часовима/данима. Ако је поравнање једнократно за један термин, исплатно се своди на форвард.

Понуда на спот тржишту (енгл. *spot bid*) Предлог произвођача да за одређени час испоручи снагу Q (MW) по задатој цени π_b (\$/MWh). Оператор тржишта прихвата понуде растућим редоследом цена док се не достигне потребна потражња. Последња прихваћена понуда одређује **спот цену**.

Крива понуде - мерит-ордер крива (енгл. *stack of bids, merit-order curve*) „Степенести“ график добијен сортирањем свих понуда по цени (од најниже ка вишој) и кумулисањем снаге по оси x . Визуелно показује које понуде улазе у производњу за дати час и на којој цени се поравнавају све прихваћене понуде.

Спот цена - цена поравнања (*market clearing price - MCP*) Цена последње прихваћене понуде у том часу. На овој цени се поравнавају све прихваћене понуде и сви дебаланси.

Балансно поравнање Разлика између *сйварне* потрошње/производње и уговорених количина (форварди/фјучерси/дугорочни) купује се или продаје по **спот цени** тог часа. Зато је MCP критичан за коначан профит.

Напомена о јединицама: уговара се најчешће **снага** у MW (за поједини час) или **енергија** у MWh (за цео час). Цене су по правилу у \$/MWh. Профит је $\Pi = \text{приходи} - \text{расходи}$ уз додавање/одузимање премија за опције.

Задатак 3.2

Правила електроенергетског тржишта у Силдавији прописују да се сва трговина обавља преко *централлизованог тржишта електричне енергије* (енгл. *Power Pool*). Компаније *Syldavia Aluminum Company (SALCo)* и *Northern Syldavia Power Company (NSPCo)* склопиле су уговор о разлици (енгл. *contract for difference, CfD*) за 200 MWh по уговореној цени (енгл. *strike price*) од 16 \$/MWh.

- Приказати ток енергије и новца између страна за тржишну цену $\pi \in \{16, 18, 13\}$ \$/MWh (количина из уговора: 200 MWh).
- Ако NSPCo у једном сату испоручи само 50 MWh, а тржишна цена је $\pi = 18$ \$/MWh, одредити токове новца.
- Ако SALCo у једном сату потроши само 100 MWh, а тржишна цена је $\pi = 13$ \$/MWh, одредити токове новца.

Решење

а) Ток енергије и новца. CfD „фиксира” ефективну цену на 16 \$/MWh за уговорну количину 200 MWh: ако је $\pi > 16$, произвођач плаћа потрошачу $(\pi - 16) \times 200$; ако је $\pi < 16$, потрошач плаћа произвођачу $(16 - \pi) \times 200$. Трговина енергијом (физички) и даље иде преко тржишта по тржишној цени π .

Табела 1: Токови новца за $\pi = 16, 18, 13$ \$/MWh (уговор: 200 MWh на 16 \$/MWh).

π	SALCo (потрошач)	NSPCo (произвођач)
16 \$/MWh	Плаћа тржишту: $200 \times 16 = 3\,200$ \$. Разлика (CfD): 0.	Прима са тржишта: 3 200 \$. Разлика (CfD): 0.
18 \$/MWh	Плаћа тржишту: $200 \times 18 = 3\,600$ \$. Прима од NSPCo (CfD): $200 \times (18 - 16) = 400$ \$.	Прима са тржишта: 3 600 \$. Плаћа SALCo (CfD): 400 \$.
13 \$/MWh	Плаћа тржишту: $200 \times 13 = 2\,600$ \$. Плаћа NSPCo (CfD): $200 \times (16 - 13) = 600$ \$.	Прима са тржишта: 2 600 \$. Прима од SALCo (CfD): 600 \$.

б) Недовољна испорука произвођача ($\pi = 18$ \$/MWh, испоручено 50 MWh). CfD и даље важи на уговорних 200 MWh.

SALCo: плаћа тржишту $200 \times 18 = 3\,600$ \$; прима од NSPCo (CfD) $200 \times (18 - 16) = 400$ \$.
NSPCo: прима са тржишта $50 \times 18 = 900$ \$; плаћа SALCo (CfD) 400 \$.

в) Мања потрошња купца ($\pi = 13$ \$/MWh, потрошено 100 MWh). CfD важи на уговорних 200 MWh.

SALCo: плаћа тржишту $100 \times 13 = 1\,300$ \$; плаћа NSPCo (CfD) $200 \times (16 - 13) = 600$ \$.
NSPCo: прима са тржишта $200 \times 13 = 2\,600$ \$; прима од SALCo (CfD) 600 \$.

Напомена. CfD је финансијски уговор. Поравнања $(\pi - 16) \times 200$ се односе на уговорну количину без обзира на стварно испоручене/потрошене MWh у том сату; физичка испорука и даље се одвија преко тржишта по цени π .

Задатак 3.3

Следећих шест компанија учествује, заједно са другима, на тржишту електричне енергије Јужног Антарктика:

- Црвена: производна компанија која поседује портфолио електрана са максималним капацитетом од 1 000 MW.
- Зелена: још једна производна компанија са портфолиом електрана са максималним капацитетом од 800 MW.
- Плава: малопродајни снабдевач електричне енергије.
- Жута: још један малопродајни снабдевач електричне енергије.
- Магента: трговачка компанија без производних капацитета и без потражње.
- Љубичаста: још једна трговачка компанија без физичке имовине.

Следеће информације односе се на рад овог тржишта за понедељак 29. фебруар 2016. између 13:00 и 14:00 часова.

Прогнозе оптерећења

Плава и Жута прогнозирају да ће њихови купци потрошити, редом, 1 200 MW и 900 MW током тог часа.

Дугорочни уговори

- Јун 2015: Црвена потписује уговор о испоруци 600 MW по 15 \$/MWh за све сате између 1. јануара 2015. и 31. децембра 2020.
- Јул 2015: Плава потписује уговор о куповини 700 MW за све сате између 1. фебруара 2016. и 31. децембра 2016. Цена је постављена на 12 \$/MWh за ванвршне сате и на 15,50 \$/MWh за вршне сате.
- Август 2015: Зелена потписује уговор о испоруци 500 MW по 16 \$/MWh за вршне сате у фебруару 2016.
- Септембар 2015: Жута потписује уговор о куповини електричне енергије. Уговор спецификује профил дневних и недељних количина и профил дневних и недељних цена. Конкретно, радним данима између 13:00 и 14:00 часова, купљена количина је 550 MW по 16,25 \$/MWh.

Фјучерс уговори

Сви уговори су за испоруку 29. фебруара 2016. између 13:00 и 14:00 часова.

Табела 2: Фјучерс уговори за 29. фебруар 2016. (13–14 h)

Датум	Компанија	Тип	Количина [MW]	Цена [\$/MWh]
10/09/15	Магента	Купује	50	14,50
20/09/15	Љубичаста	Продаје	100	14,75
30/09/15	Жута	Купује	200	15,00
10/10/15	Магента	Купује	100	15,00
20/10/15	Црвена	Продаје	200	14,75
30/10/15	Зелена	Продаје	250	15,75
30/10/15	Плава	Купује	250	15,75
10/11/15	Љубичаста	Купује	50	15,00
15/11/15	Магента	Продаје	100	15,25
20/11/15	Жута	Купује	200	14,75
30/11/15	Плава	Купује	300	15,00
10/12/15	Црвена	Продаје	200	16,00
15/12/15	Црвена	Продаје	200	15,50
20/12/15	Плава	Продаје	50	15,50
15/01/16	Љубичаста	Продаје	200	14,50
20/01/16	Магента	Купује	50	14,25
10/02/16	Жута	Купује	50	14,50
20/02/16	Црвена	Купује	200	16,00
25/02/16	Магента	Продаје	100	17,00
28/02/16	Љубичаста	Купује	250	14,00
28/02/16	Жута	Продаје	100	14,00

Опциони уговори

У новембру 2015. године, Црвена је купила пут (*енгл. put*) опцију за 200 MWh по 14,75 \$/MWh. Накнада за опцију је износила 50 \$.

У децембру 2015. године, Жута је купила кол (*енгл. call*) опцију за 100 MWh по 15,50 \$/MWh. Накнада за опцију је износила 25 \$.

Исход

- Спот цена на тржишту електричне енергије Јужног Антарктика била је 15,75 \$/MWh за 29. фебруар 2016. између 13:00 и 14:00 часова.
- Због потешкоћа на једној од својих главних електрана, Црвена је могла да произведе само 800 MW. Њен просечан трошак производње био је 14,00 \$/MWh.
- Зелена је произвела 770 MW по просечном трошку од 14,25 \$/MWh.
- Стварна потрошња код Плаве износила је 1 250 MW. Њена просечна малопродајна цена била је 16,50 \$/MWh.
- Потрошња код Жуте износила је 850 MW. Њена просечна малопродајна цена била је 16,40 \$/MWh.

Под претпоставком да се сви дебаланси поравнавају по цени спот тржишта, израчунати профит или губитак сваког од ових учесника.

Решење

Табела 3: Црвена (произвођач)

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Дугорочна продаја	0	600	15,00	9 000
Фјучерс продаја	0	200	14,75	2 950
Накнада за <i>put</i> опцију	0	0		-50
Фјучерс продаја	0	200	16,00	3 200
Фјучерс продаја	0	200	15,50	3 100
Фјучерс куповина	200	0	16,00	-3 200
Трошак производње	800	0	14,00	-11 200
Спот куповина	200	0	15,75	-3 150
Биланс	1 200	1 200		
Профит				650 \$

Табела 4: Зелена (произвођач)

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Дугорочна продаја	0	500	16,00	8 000
Фјучерс продаја	0	250	15,75	3 937,5
Трошак производње	770	0	14,25	-10 972,5
Спот продаја	0	20	15,75	315
Биланс	770	770		
Профит				1 280 \$

Табела 5: Плава (снабдевач)

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Дугорочна куповина	700	0	15,50	-10 850
Фјучерс куповина	250	0	15,75	-3 937,5
Фјучерс куповина	300	0	15,00	-4 500
Фјучерс продаја	0	50	15,50	775
Малопродаја	0	1 250	16,50	20 625
Спот куповина	50	0	15,75	-787,5
Биланс	1 300	1 300		
Профит				1 325 \$

Табела 6: Жута (снабдевач)

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Дугорочна куповина	550	0	16,25	-8 937,5
Фјучерс куповина	200	0	15,00	-3 000
Фјучерс куповина	200	0	14,75	-2 950
Накнада за опцију	0	0		-25
Фјучерс куповина	50	0	14,50	-725
Фјучерс продаја	0	100	14,00	1 400
Малопродаја	0	850	16,40	13 940
Остваривање опције	100	0	15,50	-1 550
Спот продаја	0	150	15,75	2 362,5
Биланс	1 100	1 100		
Профит				515 \$

Табела 7: Магента (трговац)

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Фјучерс куповина	50	0	14,50	-725
Фјучерс куповина	100	0	15,00	-1 500
Фјучерс продаја	0	100	15,25	1 525
Фјучерс куповина	50	0	14,25	-712,5
Фјучерс продаја	0	100	17,00	1 700
Биланс	200	200		
Профит				287,5 \$

Табела 8: Љубичаста (трговац)

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Фјучерс продаја	0	100	14,75	1 475
Фјучерс куповина	50	0	15,00	-750
Фјучерс продаја	0	200	14,50	2 900
Фјучерс куповина	250	0	14,00	-3 500
Биланс	300	300		
Профит				125 \$

Задатак 3.4

Оператор централизованог тржишта електричне енергије примио је понуде приказане у Табели 9 за испоруку електричне енергије током датог периода:

Табела 9: Понуде за испоруку електричне енергије

Компанија	Количина [MWh]	Цена [\$/MWh]
Црвена	100	12,5
Црвена	100	14,0
Црвена	50	18,0
Плава	200	10,5
Плава	200	13,0
Плава	100	15,0
Зелена	50	13,5
Зелена	50	14,5
Зелена	50	15,5

- а) Конструисати криву понуде.
- б) Под претпоставком да ово тржиште ради једнострано, тј. да купци не дају понуде, већ је потражња дата прогнозом, израчунати тржишну цену, количину електричне енергије коју производи свака компанија и приход сваке компаније за следећу потражњу: 400 MW, 600 MW и 875 MW.
- в) Под претпоставком да се уместо као константна, потражња представља својом инверзном кривом њој изражње облика:

$$D = L - 4,0 \cdot \pi$$

где је D потражња, L прогнозирано оптерећење, а π цена, израчунати утицај ове ценовне еластичности потражње на тржишну цену и количину електричне енергије која се тржије.

- г) Приказати на графику криву понуде и криву њој изражње за сва три случаја из претходног дела.

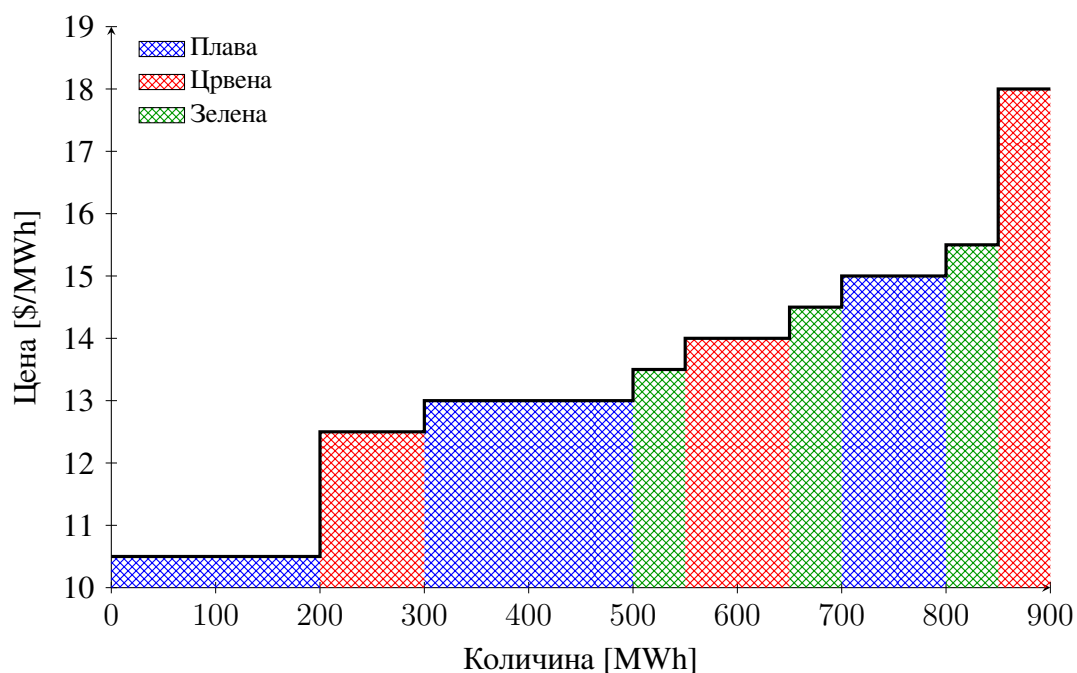
Решење

- а) Конструисати криву понуде.

Да би се конструисала крива понуде, понуде се поређају по растућој цени и исцртава се добијена степенаста функција. Дужина сваког корака једнака је количини из понуде. Корисно је означити сваки корак именом компаније која је поднела понуду.

Табела 10: Сортирање понуда по растућој цени

Компанија	Количина [MWh]	Кумулативно [MWh]	Цена [\$/MWh]
Плава	200	200	10,5
Црвена	100	300	12,5
Плава	200	500	13,0
Зелена	50	550	13,5
Црвена	100	650	14,0
Зелена	50	700	14,5
Плава	100	800	15,0
Зелена	50	850	15,5
Црвена	50	900	18,0



Слика 11: Крива понуде са шрафуром у боји компаније (под хоризонталама)

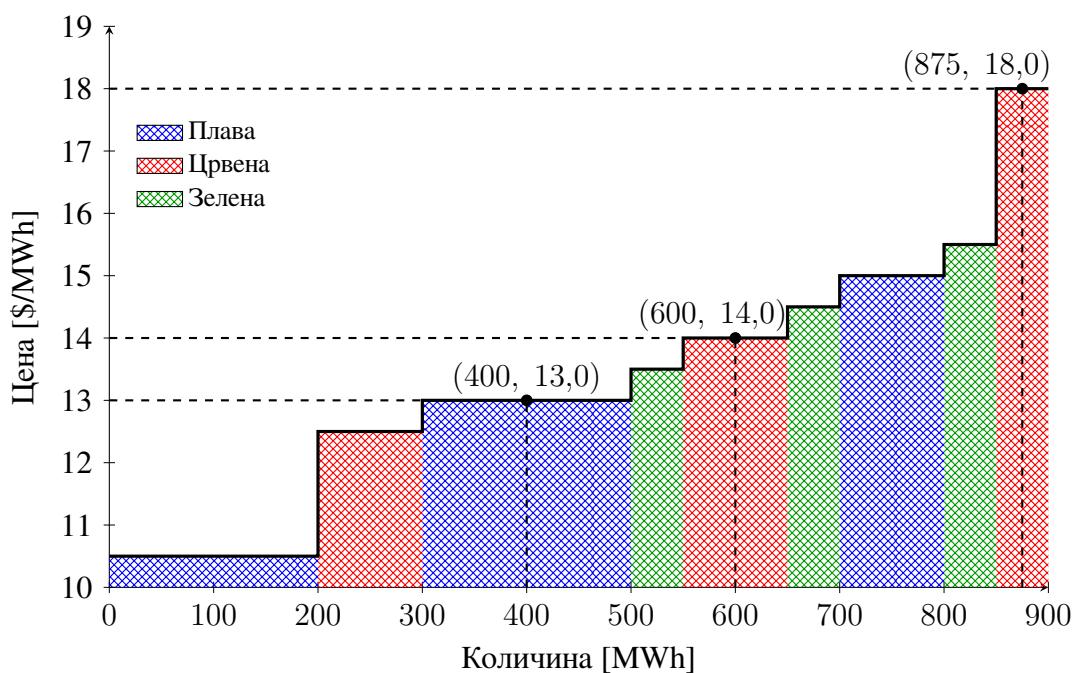
- б) Под претпоставком да ово тржиште ради једнострано, тј. да купци не дају понуде, већ је приказана дата производом, израчунајте тржишну цену, количину електричне енергије коју производи свака компанија и приход сваке компаније за следећу приказану: 400 MW, 600 MW и 875 MW.

Користећи Табелу 10 или криву понуде, за потражњу од 400 MW тржишна цена је 13 \$/MWh. Према томе, прихваћене понуде и приходи по компанијама су приказани у Табели 11:

Укупни приходи: Плава = **3900 \$** Црвена = **1300 \$** Зелена = **0 \$**

Табела 11: Прихваћене понуде и приходи компанија за потражњу од 400 MW

Компанија	Количина [MW]	Приход [\$]
Плава	200	2 600
Црвена	100	1 300
Плава	100	1 300



Слика 12: Тржишне равнотеже за потражње од 400, 600 и 875 MW

За оптерећење од 600 MW, цена је 14 \$/MWh. Прихваћене понуде и приходи су приказани у Табели 12:

Табела 12: Прихваћене понуде и приходи за потражњу од 600 MW

Компанија	Количина [MW]	Приход [\$]
Плава	200	2 800
Црвена	100	1 400
Плава	200	2 800
Зелена	50	700
Црвена	50	700

Укупни приходи: Плава = **5 600 \$** Црвена = **2 100 \$** Зелена = **700 \$**

Ако је потражња 875 MW, цена је 18 \$/MWh. Прихваћене понуде и приходи су приказани у Табели 13:

Табела 13: Прихваћене понуде и приходи за оптерећење од 875 MW

Компанија	Количина [MW]	Приход [\$]
Плава	200	3 600
Црвена	100	1 800
Плава	200	3 600
Зелена	50	900
Црвена	100	1 800
Зелена	50	900
Плава	100	1 800
Зелена	50	900
Црвена	25	450

Укупни приходи: Плава = **9 000 \$** Црвена = **4 050 \$** Зелена = **2 700 \$**

- в) Под претпоставком да се уместио као константна, иодражња претставља својом инверзном кривом иодражње облика:

$$D = L - 4 \cdot \pi$$

где је D иодражња, L прогнозирано оптерећење, а π цена, израчунајте утицај ове ценовне еластичности иодражње на иржшину цену и количину електричне енергије која се ирјује.

За свако прогнозирано оптерећење, потражња се рачуна по формули

$$D = L - 4 \cdot \pi,$$

затим се на графику прикажу крива потражње и крива понуде; место њиховог пресека даје иржшину цену и иртовану количину.

За прогнозирано оптерећење од 400 MW, цена је 13 \$/MWh, а потражња је $D = 400 - 4 \cdot 13 = 348$ MW. Користећи криву понуде, добијамо производње и приходе приказане у Табели 14.

Табела 14: Прихваћене понуде и приходи за ценовно осетљиву потражњу при $L = 400$ MW

Компанија	Количина [MW]	Приход [\$]
Плава	200	2 600
Црвена	100	1 300
Плава	48	624

Укупни приходи: Плава = **3 224 \$** Црвена = **1 300 \$** Зелена = **0 \$**

За прогнозирано оптерећење од 600 MW, цена би била 14 \$/MWh ако потражња није осетљива на цену. Међутим, користећи криву понуде видимо да таква потражња доводи до цене 13,5 \$/MWh. На тој цени, ценовно осетљива потражња је:

$$D = 600 - 4,0 \times 13,5 = 546 \text{ MW.}$$

У тим условима, производње и приходи дати су у Табели 15.

Табела 15: Прихваћене понуде и приходи за ценовно осетљиву потражњу при $L = 600 \text{ MW}$

Компанија	Количина [MW]	Приход [\$]
Плава	200	2 700
Црвена	100	1 350
Плава	200	2 700
Зелена	46	621

Укупни приходи: Плава = **5 400 \$** Црвена = **1 350 \$** Зелена = **621 \$**

Коначно, ако је прогнозирано оптерећење 875 MW, онда је потражња 813 MW за цену од 15,5 \$/MWh; у тим условима производње и приходи су дати у Табели 16.

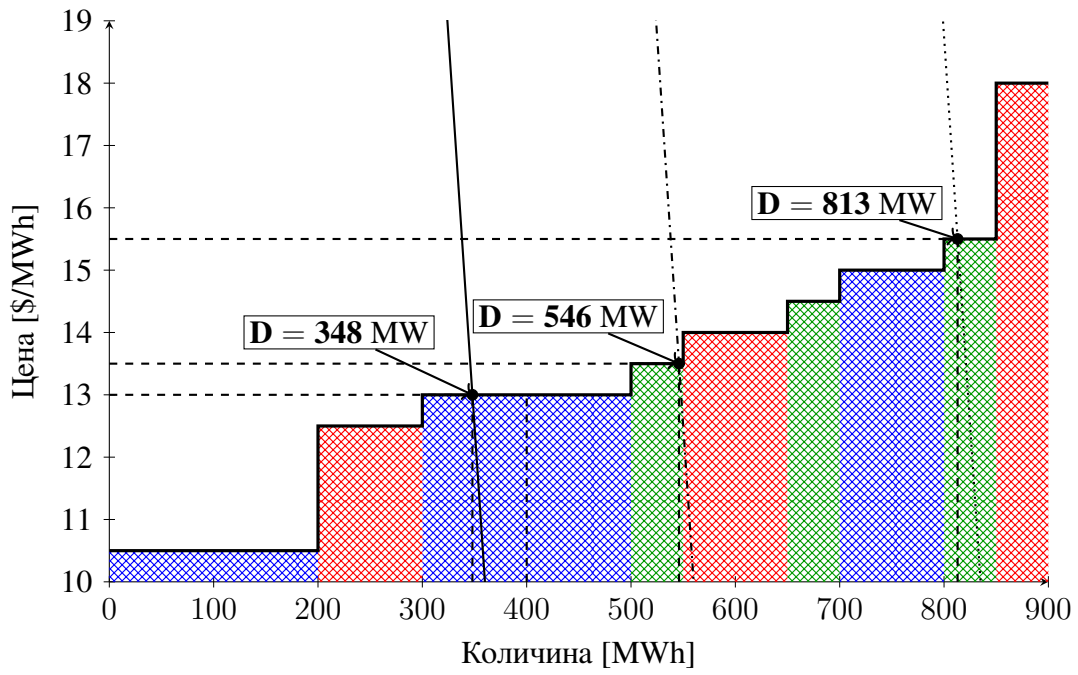
Табела 16: Прихваћене понуде и приходи за ценовно осетљиву потражњу при $L = 875 \text{ MW}$

Компанија	Количина [MW]	Приход [\$]
Плава	200	3 100
Црвена	100	1 550
Плава	200	3 100
Зелена	50	775
Црвена	100	1 550
Зелена	50	775
Плава	100	1 550
Зелена	13	201,5

Укупни приходи: Плава = **7 750 \$** Црвена = **3 100 \$** Зелена = **1 751,5 \$**

- г) Прикажи на графику криву понуде и криве потражње за сва три случаја из претходног дела.

На Слици 13 су приказани пресеци криве понуде и крива потражње за сва три случаја прогнозиране потражње.



Слика 13: Пресеци криве понуде и потражње: означене вредности D и пројекције на осе

Задатак 3.5

Компанија *Силдавискa електрoдистрoбуциjа (Syldavian Power and Light Company)* поседује једну електрану и снабдева одређени број купаца. Активно је трговала на тржишту и за 11. јун између 10:00 – 11:00 часова има следећу позицију:

- Дугорочни уговор о куповини 600 MWh у *вршним сајтима* по 20,00 \$/MWh.
- Дугорочни уговор о куповини 400 MWh у *ванвршним сајтима* по 16,00 \$/MWh.
- Дугорочни уговор са великим индустријским купцем о продаји 50 MWh по 19,00 \$/MWh (фиксна цена).
- Остали купци плаћају тарифу 21,75 \$/MWh.
- Фјучерс: продаја 200 MWh по 21,00 \$/MWh.
- Фјучерс: куповина 100 MWh по 22,00 \$/MWh.
- Кол опција за 150 MWh са ударном ценом 20,50 \$/MWh.
- Пут опција за 200 MWh са ударном ценом 23,50 \$/MWh.
- Call опција за 300 MWh са ударном ценом 24,00 \$/MWh.

Премија за све опције износи 1,00 \$/MWh. *Вршни сајти* су дефинисани као период између 08:00 и 20:00 часова.

Исход за 11. јун, 10:00–11:00:

- Спот цена је 21,50 \$/MWh.
 - Укупна испорука електричне енергије је 1 200 MW (укључујући великог индустријског купца).
 - Електрана је произвела 300 MWh по просечном трошку 21,25 \$/MWh.
- а) Под претпоставком да се сва одступања поравнавају по спот цени, израчунати *профит* или *губитак* компаније у том часу.
- б) Који *износ своје цене* своди профит/губитак на нулу? Да ли би та промена цене утицала на реализацију неких опционих уговора?

Решење

- а) *Под претпоставком да се сва одступања поравнавају по својој цени, израчунати профит или губитак компаније у том часу.*

Табела 17: Профит/губитак компаније за период 11. јун између 10:00 – 11:00 часова

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Индустријски купац		50	19,00	950
Остали купци (малопродаја)		1 150	21,75	25 012,5
Фјучерс — продаја		200	21,00	4 200
Пут опција — реализација		200	23,50	4 700
Дугорочни уговор — куповина	600		20,00	–12 000
Фјучерс — куповина	100		22,00	–2 200
Кол опција — реализација	150		20,50	–3 075
Производња (просечни трошак)	300		21,25	–6 375
Поравнање на споту	450		21,50	–9 675
Премија опције (150 MWh кол)			1,00	–150
Премија опције (200 MWh пут)			1,00	–200
Премија опције (300 MWh кол)			1,00	–300
Биланс	1 600	1 600		
Профит				887,5 \$

б) Који износ своје цене своди профит/губитак на нулу? Да ли би та промена цене утицала на реализацију неких опционих уговора?

Да би се профит свео на нулу, *расходи* морају бити једнаки *приходима*. Све ставке осим куповине на споту остају исте; једино се мења трошак за поравнање 450 MWh дебаланса који зависи од спот цене π . Додатни трошак за покривање дебаланса мора бити једнак тренутном профиту. Зато важи:

$$450 \cdot (\pi - 21,5) = 887,5 \implies \pi = \frac{887,5}{450} + 21,5 = 23,47 \text{ \$/MWh.}$$

Опције при овој цени:

- Кол опција на 20,50 \$/MWh остаје реализована.
- Пут опција на 23,50 \$/MWh остаје реализована (јер је $23,47 < 23,50$).
- Кол опција на 24,00 \$/MWh остаје нерелизована.

Све три опције би остале са истим статусом реализације као и када је цена била 21,50 \$/MWh.

Задатак 3.6

Компанија *Borduria Energy* поседује нуклеарну електрану и гасну електрану. Њен трговачки сектор је закључио следеће уговоре за 25. јануар:

- Т-1: Форвард уговор о продаји 50 MW по цени 21,00 \$/MWh. Овај уговор важи за све часове.
- Т-2: Дугорочни уговор о продаји 300 MW током ванвршних часова по цени 14,00 \$/MWh.
- Т-3: Дугорочни уговор о продаји 350 MW током вршних часова по цени 20,00 \$/MWh.

Поред тога, за трговински период од 14:00 до 15:00 тог дана, закључене су следеће трансакције:

- Т-4: Фјучерс уговор за куповину 600 MWh по 20,00 \$/MWh.
- Т-5: Фјучерс уговор за продају 100 MWh по 22,00 \$/MWh.
- Т-6: Пут опција за 250 MWh са ценом извршења 23,50 \$/MWh.
- Т-7: Кол опција за 200 MWh са ценом извршења 22,50 \$/MWh.
- Т-8: Пут опција за 100 MWh са ценом извршења 18,75 \$/MWh.
- Т-9: Понуда на спот тржишту за производњу 50 MW коришћењем гасне електране по 19,00 \$/MWh.
- Т-10: Понуда на спот тржишту за производњу 100 MW коришћењем гасне електране по 22,00 \$/MWh.

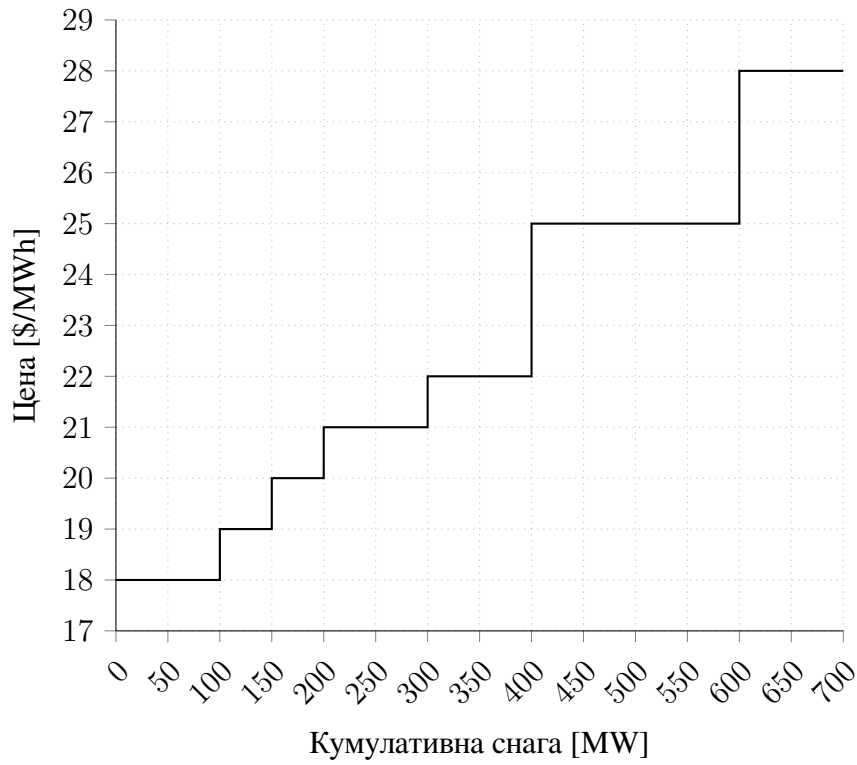
Премија за све кол и пут опције износи 2,00 \$/MWh. Вршни сати су дефинисани као период између 08:00 и 20:00.

Borduria Energy такође директно продаје електричну енергију малим купцима преко малопродајног сектора. Резиденцијални купци плаћају тарифу 25,50 \$/MWh, а комерцијални 25,00 \$/MWh. *Borduria Energy* не продаје електричну енергију индустријским купцима.

График на Слици 14 приказује криву понуда које је оператор спот тржишта примио за период трговања од 14:00 до 15:00, 25. јануара. Ради балансирања потрошње и производње, прихваћене су понуде у укупном износу од 225 MW, растућим редоследом цена за тај час. Спот цена је постављена на цену последње прихваћене понуде.

Током тог часа, резиденцијални купци које снабдева *Borduria Energy* потрошили су 300 MW, док су њени комерцијални купци потрошили 200 MW. Нуклеарна електрана је произвела 400 MWh по просечном трошку 16,00 \$/MWh, а гасна електрана 200 MWh по просечном трошку 18,00 \$/MWh. Сви дебаланси се поравнавају по цени спот тржишта.

- а) Израчунати профит или губитак који је *Borduria Energy* остварила током тог часа.
- б) Израчунати утицај изненадног испада нуклеарне електране у 14:00, 25. јануара, на профит (или губитак) *Borduria Energy* за тај час.



Слика 14: Крива понуда за период 14 – 15 h.

Решење

- а) *Изрaчунајтe профит или губитак који је Borduria Energy остварила током тог часа.*
 Да би се израчунао профит или губитак компаније у том часу, потребно је израчунати расходе и приходе по појединачним ставкама, као што је приказано у Табели 18.

Табела 18: Базни случај за период 14 – 15h, MCP = 21 \$/MWh.

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Нуклеарна електрана	400	0	16,00	–6 400
Гасна електрана	200	0	18,00	–3 600
Форвард Т1 (продаја)	0	50	21,00	1 050
Дугорочни Т3 (продаја)	0	350	20,00	7 000
Фјучерс Т4 (куповина)	600	0	20,00	–12 000
Фјучерс Т5 (продаја)	0	100	22,00	2 200
Реализација пут опције Т6	0	250	23,50	5 875
Спот продаја Т9	0	50	21,00	1 050
Резиденцијални купци	0	300	25,50	7 650
Комерцијални купци	0	200	25,00	5 000
Спот поравнање	100	0	21,00	–2 100
Премија опције Т6	0	0	2,00	–500
Премија опције Т7	0	0	2,00	–400
Премија опције Т8	0	0	2,00	–200
Биланс	1 300	1 300		
Профит				4 625 \$

б) *Израчунајте утицај изненадног испада нуклеарне електране у 14:00, 25. јануара, на профит (или губитак) Borduria Energy за тај час.*

Ако у 14:00, 25. јануара, дође до изненадног застоја нуклеарне електране, могу се размотрити два сценарија. Први се односи на чисто економски однос између спот цене и цене извршења опције. Други произилази из чињенице да је час започео у 14:00, док тржишна правила захтевају благовремену активацију опција, што у овом случају може ограничити њихову примену. Стога ће се кроз (б1) и (б2) анализирати оба сценарија.

Поред тога, испад електране доводи до дефицита електричне енергије у целој зони трговања, и тај дефицит се мора надокнадити на спот тржишту (ради једноставности, без увођења балансног тржишта у игру). Резултат је еквивалентан повећању потражње у износу снаге испале електране, па нова цена поравнања одговара потражњи од 625 MW, и износи 28 \$/MWh.

(б1) Компанија **може** да реализује своје опционе уговоре. У Табели 19 су приказани приходи и расходи у овом случају.

Табела 19: Застој нуклеарке у 14h, опције се реализују; MCP = 28 \$/MWh.

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Нуклеарна електрана (у застоју)	0	0	16,00	0
Гасна електрана	200	0	18,00	-3 600
Форвард Т1 (продаја)	0	50	21,00	1 050
Дугорочни Т3 (продаја)	0	350	20,00	7 000
Фјучерс Т4 (куповина)	600	0	20,00	-12 000
Фјучерс Т5 (продаја)	0	100	22,00	2 200
Реализација кол опције Т7	200	0	22,50	-4 500
Спот продаја Т9	0	50	28,00	1 400
Спот продаја Т10	0	100	28,00	2 800
Резиденцијални купци	0	300	25,50	7 650
Комерцијални купци	0	200	25,00	5 000
Спот поравнање	150	0	28,00	-4 200
Премија опције Т6	0	0	2,00	-500
Премија опције Т7	0	0	2,00	-400
Премија опције Т8	0	0	2,00	-200
Биланс	1 150	1 150		
Профит				1 700 \$

(б2) Компанија **не може** да реализује своје опционе уговоре. У Табели 20 су приказани приходи и расходи у овом случају.

Табела 20: Застој нуклеарке у 14h, опције се не реализују; MCP = 28 \$/MWh.

Ставка	Енергија купљена [MWh]	Енергија продата [MWh]	Цена [\$/MWh]	Приходи / Расходи [\$]
Нуклеарна електрана (у застоју)	0	0	16,00	0
Гасна електрана	200	0	18,00	-3 600
Форвард Т1 (продаја)	0	50	21,00	1 050
Дугорочни Т3 (продаја)	0	350	20,00	7 000
Фјучерс Т4 (куповина)	600	0	20,00	-12 000
Фјучерс Т5 (продаја)	0	100	22,00	2 200
Реализација пут опције Т6	0	250	23,50	5 875
Спот продаја Т9	0	50	28,00	1 400
Спот продаја Т10	0	100	28,00	2 800
Резиденцијални купци	0	300	25,50	7 650
Комерцијални купци	0	200	25,00	5 000
Спот поравнање	600	0	28,00	-16 800
Премија опције Т6	0	0	2,00	-500
Премија опције Т7	0	0	2,00	-400
Премија опције Т8	0	0	2,00	-200
Биланс	1 400	1 400		
Профит				-525 \$

4 Учешће на тржиштима електричне енергије

Задатак 4.1

Cheapo Electrons је малопродавац електричне енергије. Табела испод приказује прогнозу потрошње његових потрошача током шесточасовног периода. *Cheapo Electrons* је на форвард и спот тржишту купио управо онолико енергије колико је предвиђено прогнозом. Табела такође даје просечну цену по којој је енергија купљена у сваком часу. Као што се може очекивати, стварна потрошња није била иста као прогноза, па је компанија морала да купује или продаје разлику на спот тржишту по наведеним ценама.

Под претпоставком да *Cheapo Electrons* продаје енергију купцима по јединственој цени од 24,00 \$/MWh, израчунати добитак или губитак током ових шест часова. Која би цена омогућила „нулти резултат“ (енгл. *break-even*)?

Табела 21: Прогноза потрошње и цене за *Cheapo Electrons*

Час	1	2	3	4	5	6
Прогноза потрошње [MWh]	120	230	310	240	135	110
Просечна набавна цена [\$/MWh]	22,5	24,5	29,3	25,2	23,1	21,9
Стварна потрошња [MWh]	110	225	330	250	125	105
Спот цена [\$/MWh]	21,6	25,1	32,0	25,9	22,5	21,5

Решење

У Табели 22 приказани су појединачни трошкови и приходи: Трошкови набавке (форвард тржиште), приход од продаје, спот трансакције и профит по периоду.

Табела 22: Приходи и расходи *Cheapo Electrons*

Период	Трошкови набавке [\$]	Приход од продаје [\$]	Спот трансакције [\$]	Профит [\$]
1	-2 700	2 640	216	156
2	-5 635	5 400	125,5	-109,5
3	-9 083	7 920	-640	-1 803
4	-6 048	6 000	-259	-307
5	-3 118,5	3 000	225	106,5
6	-2 409	2 520	107,5	218,5
Укупно	-28 993,5	29 480	-225	-1 738,5

Збирни резултат у шест часова је губитак од -1 738,50 \$.

Нулти резултат. Цена по којој *Cheapo Electrons* треба да продаје енергију да би покрио све трошкове (форвард и спот) добија се условом:

$$\pi \times \sum_{i=1}^6 L_i - 28\,993,5 - 225 = 0$$

одакле следи

$$\pi = 25,52 \text{ $/MWh.}$$

Задатак 4.2

Крива зависности потрошње енергента од излазне снаге (енгл. *input–output curve*) гасне електране апроксимира се:

$$H(P) = 120 + 9,3P + 0.0025P^2 \quad [\text{MJ/h}],$$

са најмањом стабилном снагом $P_{\min} = 200 \text{ MW}$ и максималном $P_{\max} = 500 \text{ MW}$. Цена гаса је $1,20 \text{ \$/MJ}$. Током шесточасовног периода јединица продаје енергију по следећим ценама (по периодима):

Табела 23: Цене електричне енергије по часовима

Период	1	2	3	4	5	6
Цена [\$/MWh]	12,5	10,0	13,0	13,5	15,0	11,0

Претпоставити да је јединица већ укључена (не сме да се искључи) и да се **оптимално диспечује**. Израчунати оперативни профит/губитак у овом периоду.

Решење

Сатни трошак рада (уз цену горива $F = 1,20 \text{ \$/MJ}$) је

$$C(P) = F \times H(P) = 144 + 11,16P + 0,003P^2 \quad [$/h],$$

па је маргинални трошак

$$\frac{dC}{dP} = 11,16 + 0,006P.$$

У услови оптималности за сваки период важи $\frac{dC}{dP} = \pi$, одакле

$$P^*(\pi) = \frac{\pi - 11,16}{0,006} \quad \text{и потом се пројектује на } [200, 500] \text{ MW}.$$

Табела 24: Оптимална производња и резултати по периодима (Задатак 4.2)

Период	1	2	3	4	5	6
Цена [\$/MWh]	12,5	10,0	13,0	13,5	15,0	11,0
Производња [MW]	233,3	200,0	306,7	390,0	500,0	200,0
Приход [\$/h]	2916,7	2000,0	3986,7	5265,0	7500,0	2200,0
Трошак [\$/h]	2911,3	2496,0	3848,5	4952,7	6474,0	2496,0
Профит [\$/h]	5,4	-496,0	138,1	312,3	1026,0	-296,0
Укупни профит:						+689,8 \$

Задатак 4.3

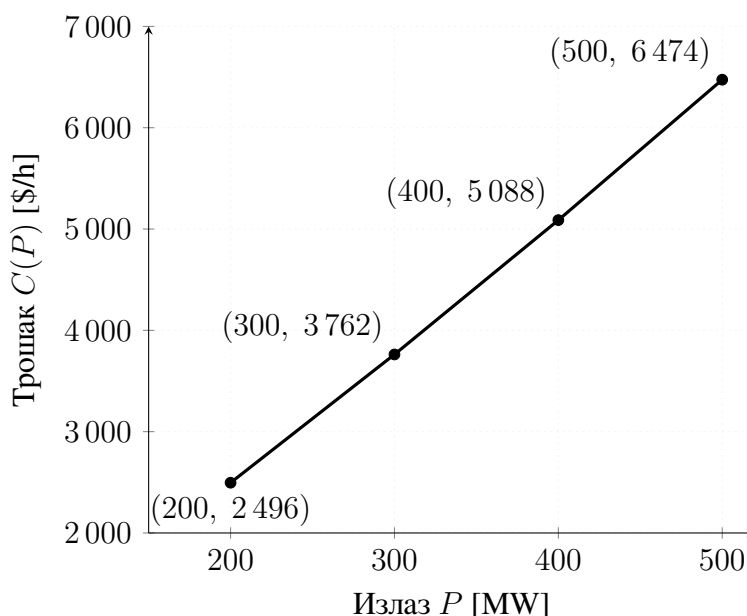
Уместо тачне криве трошкова из Задатка 4.2 користи се део-по-део линеарна функција са три сегмента. Чворови сегмената су на снагама 200, 300, 400 и 500 MW и одговарају вредностима датим квадратном функцијом у Задатку 4.2. Одредити оптимално диспечовање и упоредити укупни профит са резултатом из Задатка 4.2.

Решење

Чворови линеаризоване функције трошка дати су у Табели 25.

Табела 25: Чворови линеаризоване функције трошка

Излаз [MW]	200	300	400	500
Трошак [\$/h]	2 496	3 762	5 088	6 474



Слика 15: Линеаризована функција трошка са три сегмента

Оптимална производња по периодима, као и приход, трошак и профит, приказани су у Табели 26.

Табела 26: Оптимална производња и резултати по периодима (Задатак 4.3)

Период	1	2	3	4	5	6
Цена [\$/MWh]	12,5	10,0	13,0	13,5	15,0	11,0
Производња [MW]	200,0	200,0	300,0	400,0	500,0	200,0
Приход [\$/h]	2 500,0	2 000,0	3 900,0	5 400,0	7 500,0	2 200,0
Трошак [\$/h]	2 496,0	2 496,0	3 762,0	5 088,0	6 474,0	2 496,0
Профит [\$/h]	4,0	-496,0	138,0	312,0	1 026,0	-296,0
Укупни профит:						688,0 \$

Задатак 4.4

Претпоставимо да јединица из Задатка 4.2 има фиксан трошак покретања од 500 \$ и да је иницијално искључена. У ком тренутку ову јединицу треба укључити и када је треба искључити да би се максимизовао оперативни профит? Претпоставити да динамичка ограничења не утичу на оптимални диспечинг јединице.

Решење

Из резултата добијених у Задатку 4.2 може се уочити да, без разматрања трошка покретања, профит у првом периоду износи само око 1% трошка покретања. У следећем периоду јединица ради са губитком. Због тога, ако се узме у обзир трошак покретања, најпрофитабилнија стратегија је укључити јединицу у трећем периоду. Пошто јединица такође послује са губитком у периоду 6, пожељно је искључити је на крају периода 5.

Табела 27 приказује рад јединице под овим условима.

Табела 27: Оптималан рад јединице уз урачунат трошак покретања

Период	1	2	3	4	5	6
Цена π [\$/MWh]	12,5	10,0	13,0	13,5	15,0	11,0
Производња P [MW]	-	-	306,66	390,00	500,00	-
Приход $\pi \times P$ [\$]	-	-	3 986,66	5 265,00	7 500,00	-
Трошак рада $C(P)$ [\$]	-	-	3 848,53	4 952,70	6 474,00	-
Трошак покретања [\$]	-	-	500,00	-	-	-
Укупни трошак [\$]	-	-	4 348,50	4 952,70	6 474,00	-
Профит [\$]	-	-	-361,84	312,30	1 026,00	-
Укупни профит:					976,43 \$	

Укупан профит износи 976,43 \$.

Задатак 4.5

Поновити Задатак 4.4 узимајући у обзир да је минимално време рада ове јединице четири часа.

Решење

Ако је минимално време рада јединице 4 часа, онда није могуће искључити је на крају периода 5, па је оптималан режим рада онај приказан у Табели 28.

Табела 28: Оптималан рад јединице уз трошак покретања и минимално време рада

Период	1	2	3	4	5	6
Цена π [\$/MWh]	12,5	10,0	13,0	13,5	15,0	11,0
Производња P [MW]	-	-	306,66	390,00	500,00	200,00
Приход $\pi \times P$ [\$]	-	-	3 986,66	5 265,00	7 500,00	2 200,00
Трошак рада $C(P)$ [\$]	-	-	3 848,53	4 952,70	6 474,00	2 496,00
Трошак покретања [\$]	-	-	500,00	-	-	-
Укупни трошак [\$]	-	-	4 348,50	4 952,70	6 474,00	2 496,00
Профит [\$]	-	-	-361,84	312,30	1 026,00	-296,00
Укупни профит:						680,43 \$

Укупан профит износи 680,43 \$.

Задатак 4.6

Borduria Generation има три производне јединице са следећим функцијама трошка:

$$C_A(P_A) = 15 + 1,4 P_A + 0,04 P_A^2 \quad [$/h],$$

$$C_B(P_B) = 25 + 1,6 P_B + 0,05 P_B^2 \quad [$/h],$$

$$C_C(P_C) = 20 + 1,8 P_C + 0,02 P_C^2 \quad [$/h].$$

Како треба распоредити ове јединице ако *Borduria Generation* мора да снабде потрошњу од 350 MW по минималном трошку?

Решење

Овај проблем се може формулисати као проблем оптимизације у коме је циљ минимизација укупног трошка рада:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) \right\}$$

уз услов производње једнаке потрошњи (ограничење типа једнакости):

$$P_A + P_B + P_C = 350 \text{ MW}.$$

Формирамо Лагранжову функцију:

$$\ell(P_A, P_B, P_C, \lambda) = \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) + \lambda \left(350 - \sum_{j=1}^3 P_j \right).$$

Услови оптималности гласе:

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_A} = 1,4 + 0,08 P_A - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_B} = 1,6 + 0,10 P_B - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_C} = 1,8 + 0,04 P_C - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 350 - P_A - P_B - P_C = 0.$$

Пошто су ови услови оптималности линеарни, можемо их записати у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} 0,08 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0,10 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0,04 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,4 \\ -1,6 \\ -1,8 \\ 350 \end{bmatrix}.$$

Решење овог система једначина је:

$$P_A = 95,3 \text{ MW}, \quad P_B = 74,2 \text{ MW}, \quad P_C = 180,5 \text{ MW}, \quad \lambda = 9,02 \text{ \$/MWh}.$$

Укупан трошак производње износи 1 927,15 \$.

Задатак 4.7

Како би се променио диспечинг из Задатка 4.6 ако би *Borduria Generation* имала прилику да део енергије коју мора да испоручи купи на спот тржишту по цени од 8,20 \$/MWh?

Решење

Из решења Задатка 4.6 видимо да је гранични трошак производње, који је једнак Лагранжовом мултипликатору λ , износио 9,02 \$/MWh. Пошто је ова вредност већа од цене 8,20 \$/MWh по којој *Borduria Generation* може да купи енергију на спот тржишту, исплати се да умањи сопствену производњу све док гранични трошак производње сваке јединице не постане једнак цени на тржишту. За сваку јединицу добијамо:

$$\frac{\partial C_A}{\partial P_A} = 1,4 + 0,08P_A = 8,2 \Rightarrow P_A = 85 \text{ MW}$$

$$\frac{\partial C_B}{\partial P_B} = 1,6 + 0,10P_B = 8,2 \Rightarrow P_B = 66 \text{ MW}$$

$$\frac{\partial C_C}{\partial P_C} = 1,8 + 0,04P_C = 8,2 \Rightarrow P_C = 160 \text{ MW}$$

Збирно:

$$P_A + P_B + P_C = 311 \text{ MW}$$

Остатак оптерећења ($350 - 311 = 39 \text{ MW}$) купује се на спот тржишту.

Алтернативни приступ

Овај проблем се може формулисати као проблем оптимизације на следећи начин: нека P_{spot} означава количину енергије купљене на спот тржишту, а π_{spot} цену по којој се ова енергија купује.

Циљ је да се минимизује збир трошкова производње и трошка куповине енергије:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) + \pi_{\text{spot}} \times P_{\text{spot}} \right\}$$

уз услов:

$$P_A + P_B + P_C + P_{\text{spot}} = 350 \text{ MW}$$

Лагранжова функција гласи:

$$\ell(P_A, P_B, P_C, P_{\text{spot}}, \lambda) = \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) + \pi_{\text{spot}} P_{\text{spot}} + \lambda \left(350 - \sum_{j=1}^3 P_j - P_{\text{spot}} \right)$$

Услови оптималности су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial P_A} &= 1,4 + 0,08P_A - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_B} &= 1,6 + 0,10P_B - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_C} &= 1,8 + 0,04P_C - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_{\text{spot}}} &= \pi_{\text{spot}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} &= 350 - P_A - P_B - P_C - P_{\text{spot}} = 0 \end{aligned}$$

У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} 0,08 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0,10 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \\ P_{\text{spot}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,4 \\ -1,6 \\ -1,8 \\ 8,2 \\ 350 \end{bmatrix}$$

Решење овог система је:

$$P_A = 85 \text{ MW}, \quad P_B = 66 \text{ MW}, \quad P_C = 160 \text{ MW}, \quad P_{\text{spot}} = 39 \text{ MW}, \quad \lambda = 8,2 \text{ \$/MWh}.$$

Задатак 4.8

Ако, поред снабдевања потрошње од 350 MW, *Borduria Generation* има могућност да прода енергију на тржишту електричне енергије по цени од 10,20 \$/MWh, колика је оптимална снага коју треба да понуди на тржишту? Какав профит би остварила овом продајом?

Решење

Пошто је тржишна цена већа од маргиналног трошка производње, исплати се да *Borduria Generation* повећа производњу и продаје вишак све док маргинални трошак не достигне тржишну цену:

$$MC_A(P_A) = 1,4 + 0,08P_A = 10,2$$

$$MC_B(P_B) = 1,6 + 0,10P_B = 10,2$$

$$MC_C(P_C) = 1,8 + 0,04P_C = 10,2$$

Одатле добијамо:

$$P_A = \frac{10,2 - 1,4}{0,08} = 110 \text{ MW}$$

$$P_B = \frac{10,2 - 1,6}{0,10} = 86 \text{ MW}$$

$$P_C = \frac{10,2 - 1,8}{0,04} = 210 \text{ MW}$$

Укупна производња је 406 MW, а потрошња 350 MW, па се на спот тржишту продаје

$$P_{spot} = 406 - 350 = 56 \text{ MW}$$

Алтернативни приступ

Нека P_{spot} означава количину енергије продате на спот тржишту, а π_{spot} цену по којој се ова енергија продаје.

Критеријумска функција гласи:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) - \pi_{spot} \times P_{spot} \right\}$$

уз услов:

$$P_A + P_B + P_C - P_{spot} = 350 \text{ MW}$$

Лагранжова функција је:

$$\ell(P_A, P_B, P_C, P_{spot}, \lambda) = \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) - \pi_{spot} P_{spot} + \lambda \left(350 - \sum_{j=1}^3 P_j + P_{spot} \right)$$

Услови оптималности су:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial P_A} &= 1,4 + 0,08P_A - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_B} &= 1,6 + 0,10P_B - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_C} &= 1,8 + 0,04P_C - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_{\text{spot}}} &= \lambda - 10,2 = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} &= 350 - P_A - P_B - P_C + P_{\text{spot}} = 0\end{aligned}$$

У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} 0,08 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0,10 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \\ P_{\text{spot}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,4 \\ -1,6 \\ -1,8 \\ 350 \\ 10,2 \end{bmatrix}$$

Решење овог система је:

$$P_A = 110 \text{ MW}, \quad P_B = 86 \text{ MW}, \quad P_C = 210 \text{ MW}, \quad P_{\text{spot}} = 56 \text{ MW}, \quad \lambda = 10,2 \text{ \$/MWh}.$$

Задатак 4.9

Поновити Задатак 4.8 ако су снаге производних јединица ограничене на следећи начин:

$$P_A^{\max} = 100 \text{ MW}, \quad P_B^{\max} = 80 \text{ MW}, \quad P_C^{\max} = 250 \text{ MW}.$$

Решење

Овај проблем се формулише као и раније, али поред критеријумске функције и ограничења баланса производње и потрошње, морају се узети у обзир и ограничења по максималној снази јединица (ограничења типа неједнакости):

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) - \pi_{\text{spot}} \times P_{\text{spot}} \right\}$$

уз услов:

$$P_A + P_B + P_C - P_{\text{spot}} = 350 \text{ MW},$$

$$P_A \leq 100 \text{ MW}, \quad P_B \leq 80 \text{ MW}, \quad P_C \leq 250 \text{ MW}.$$

Лагранжова функција је:

$$\begin{aligned} \ell(P_A, P_B, P_C, P_{\text{spot}}, \lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) - \pi_{\text{spot}} P_{\text{spot}} \\ &+ \lambda \left(350 - \sum_{i=1}^3 P_i + P_{\text{spot}} \right) \\ &+ \mu_1(P_A - 100) + \mu_2(P_B - 80) + \mu_3(P_C - 250). \end{aligned}$$

Услови оптималности су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial P_A} &= 1,4 + 0,08P_A - \lambda + \mu_1 = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_B} &= 1,6 + 0,10P_B - \lambda + \mu_2 = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_C} &= 1,8 + 0,04P_C - \lambda + \mu_3 = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial P_{\text{spot}}} &= \lambda - \pi_{\text{spot}} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} &= 350 - P_A - P_B - P_C + P_{\text{spot}} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \mu_1} &= P_A - 100 \leq 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \mu_2} &= P_B - 80 \leq 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \mu_3} &= P_C - 250 \leq 0. \end{aligned}$$

Услов комплементарне слабости (енгл. *complementary slackness*):

$$\mu_1(P_A - 100) = 0, \quad \mu_2(P_B - 80) = 0, \quad \mu_3(P_C - 250) = 0.$$

Из решења без ограничења (Задатак 4.8) се зна:

$$P_A = 110 \text{ MW}, \quad P_B = 86 \text{ MW}, \quad P_C = 210 \text{ MW}.$$

Пошто P_A и P_B премашују своја ограничења, та два ограничења су активна ($\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$), док P_C није на граници ($\mu_3 = 0$).

У матричном облику систем изгледа овако:

$$\begin{bmatrix} 0,08 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,10 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \\ P_{\text{spot}} \\ \lambda \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,4 \\ -1,6 \\ -1,8 \\ 10,2 \\ 350 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Решење овог система је:

$$\begin{aligned} P_A &= 100 \text{ MW}, & P_B &= 80 \text{ MW}, & P_C &= 210 \text{ MW}, \\ P_{\text{spot}} &= 40 \text{ MW}, & \lambda &= 10,2 \text{ \$/MWh}, \\ \mu_1 &= 0,8 \text{ \$/MWh}, & \mu_2 &= 0,6 \text{ \$/MWh}. \end{aligned}$$

Ово решење је прихватљиво јер су Лагранжови мултипликатори μ_1 и μ_2 позитивни. То значи да је оно оптимално.

Јединица C ради на маргиналном трошку које је једнако цени на тржишту (10,2 \$/MWh), док јединице A и B раде на свом максимуму (према ограничењу) са нижим маргиналним трошком. Вредности μ_1 и μ_2 показују колико би се уштедело ако би се ограничење по снази јединица A и B релаксирало (повећало) за 1 MW.

Задатак 4.10

Посматра се тржиште електричне енергије које снабдевају две производне компаније чије су функције трошкова дате функцијама:

$$C_A = 36 \cdot P_A \quad [$/h],$$

$$C_B = 31 \cdot P_B \quad [$/h].$$

Инверзна функција потражње за ово тржиште процењује се као:

$$\pi = 120 - D \quad [$/MWh].$$

Претпостављајући Cournot-ов модел конкуренције, користити табелу сличну оној из Примера 4.8 за одређивање равнотежне тачке овог тржишта (цена, количина, производња и профит сваке компаније).

[Савет: користијте spreadsheet. Резолуција од 5 MW је прихватљива]

Решење

У Cournot-овом моделу конкуренције стање тржишта одређују производне одлуке сваке компаније. Можемо сажети могуће исходе користећи табелу у којој све ћелије у једној колони одговарају датој производњи генератора А, док све ћелије у једном реду одговарају датој производњи генератора В.

Свака ћелија садржи четири информације распоређене у следећем формату:

$$\begin{array}{c|c} D & \Omega_A \\ \hline \Omega_B & \pi \end{array}$$

Где је: - π — цена [\$/MWh] - D — тражња [MWh] - Ω_A — профит фирме А [\$] - Ω_B — профит фирме В [\$]

За дате производње P_A и P_B ова два генератора, остале величине се рачунају на следећи начин:

$$D = P_A + P_B,$$

$$\pi = 120 - D,$$

$$\Omega_A = P_A(\pi - 36),$$

$$\Omega_B = P_B(\pi - 31).$$

Фајл *P4-10.xls* садржи spreadsheet коришћен за израчунавање резултата приказаних у Табели 29. Из ове табеле видимо да ћелија која одговара $P_A = 25$ MW и $P_B = 30$ MW представља равнотежну тачку, јер одступање од тих услова смањује профит генератора који прилагођава своју производњу.

Табела 29: Cournot-ов модел конкуренције

$P_B \backslash P_A$	5	10	15	20	25	30	35
5	10/370 395/110	15/690 370/105	20/960 345/100	25/1180 320/95	30/1350 295/90	35/1470 270/85	40/1540 245/80
10	15/345 740/105	20/640 690/100	25/885 640/95	30/1080 590/90	35/1225 540/85	40/1320 490/80	45/1365 440/75
15	20/320 1035/100	25/590 960/95	30/810 885/90	35/985 810/85	40/1100 735/80	45/1170 660/75	50/1190 585/70
20	25/295 1280/95	30/540 1180/90	35/735 1080/85	40/880 980/80	45/975 880/75	50/1020 780/70	55/1045 680/65
25	30/270 1475/90	35/490 1350/85	40/660 1225/80	45/780 1100/75	50/850 975/70	55/870 850/65	60/840 725/60
30	35/245 1620/85	40/440 1470/80	45/585 1320/75	50/680 1170/70	55/725 1020/65	60/720 870/60	65/665 720/55
35	40/220 1715/80	45/390 1540/75	50/510 1365/70	55/580 1190/65	60/600 1015/60	65/570 850/55	70/490 665/50

У свакој ћелији табеле, горњи бројеви представљају (π/Ω_A) , а доњи (Ω_B/D) . Жута ћелија означава Cournot-ову равнотежу:

$$P_A = 25 \text{ MW}, \quad P_B = 30 \text{ MW}, \quad \pi = 55 \text{ \$/MWh}.$$

Задатак 4.11

Написати и решити услове оптималности за Задатак 4.10.

Решење

$$\max\{\Omega_A + \Omega_B\}$$

Свака производна компанија покушава да максимизује свој профит, који је једнак разлици између прихода и трошка:

$$\Omega_A = P_A \pi(D) - C_A(P_A),$$

$$\Omega_B = P_B \pi(D) - C_B(P_B).$$

Међутим, не можемо третирати ове две максимизације као одвојене проблеме оптимизације јер су повезане преко тражње:

$$P_A + P_B = D, \quad \pi = 120 - D.$$

Овај проблем можемо решити тако што цену изразимо као функцију производње два генератора:

$$\pi = 120 - P_A - P_B.$$

Профити за два генератора могу се затим записати као:

$$\Omega_A = P_A(120 - P_A - P_B) - 36P_A = -P_A^2 + (84 - P_B)P_A,$$

$$\Omega_B = P_B(120 - P_A - P_B) - 31P_B = -P_B^2 + (89 - P_A)P_B.$$

Услов оптималности за проблем максимизације профита генератора A је:

$$\frac{\partial \Omega_A}{\partial P_A} = -2P_A - P_B + 84 = 0,$$

док је услов оптималности за проблем максимизације профита генератора B :

$$\frac{\partial \Omega_B}{\partial P_B} = -P_A - 2P_B + 89 = 0.$$

(Посматрамо само парцијалне изводе профита генератора по сопственој производњи јер је то једина величина над којом он има контролу.)

Стављајући ове услове оптималности у матрични облик добијамо:

$$\ell(P_A, P_B) = \Omega_A + \Omega_B = -P_A^2 + (84 - P_B)P_A - P_B^2 + (89 - P_A)P_B,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_A} = -2P_A + 84 - P_B,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial P_B} = -2P_B + 89 - P_A.$$

У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -84 \\ -89 \end{bmatrix}.$$

Решавањем овог система добијамо:

$$P_A = 26,333 \text{ MW}, \quad P_B = 31,333 \text{ MW}.$$

Из овога можемо лако наћи:

$$\begin{aligned} \pi &= 62,333 \text{ \$/MWh}, & D &= 57,667 \text{ MW}, \\ \Omega_A &= 693,44 \text{ \$}, & \Omega_B &= 981,78 \text{ \$}. \end{aligned}$$

Задатак 4.12

Размотрити реверзибилну хидроелектрану из Примера 4.10 и профил цена приказан у следећој табели. Под претпоставком да оператор користи исту стратегију као у примеру (резервоар је иницијално празан, пумпање током четири часа са најнижом ценом и генерисање током четири часа са највишом ценом), израчунати добитак или губитак који би електрана остварила током овог циклуса рада. Одредити степен ефикасности постројења при ком би добитак или губитак био једнак нули (енгл. *break-even*).

Период	1	2	3	4	5	6
Цена [\$/MWh]	40,92	39,39	39,18	40,65	45,42	56,34
Период	7	8	9	10	11	12
Цена [\$/MWh]	58,05	60,15	63,39	59,85	54,54	49,50

Следећа табела се може добити (нпр. коришћењем spreadsheet-а из фајла *P4-12.xls*) да би се сажела операција ове реверзибилне електране:

Период	Цена [\$/MWh]	Енергија утрошена (MWh)	Енергија произведена (MWh)	Трошак (\$)	Приход (\$)
1	40,92	250	0	10 230	0
2	39,39	250	0	9 848	0
3	39,18	250	0	9 795	0
4	40,65	250	0	10 163	0
5	45,42	0	0	0	0
6	56,34	0	0	0	0
7	58,05	0	187,5	0	10 885
8	60,15	0	187,5	0	11 278
9	63,39	0	187,5	0	11 886
10	59,85	0	187,5	0	11 222
11	54,54	0	0	0	0
12	49,50	0	0	0	0
Укупно	–	1 000	750	40 037	45 271

Електрана остварује добитак:

$$45\,271 - 40\,037 = 5\,235 \$ \quad \text{током овог циклуса.}$$

Степен ефикасности постројења који би смањио профит на нулу је онај при којм би приход од продаје произведене енергије био једнак трошку енергије утрошене за пумпање. Пошто је произведена енергија једнака утрошеној енергији помноженој са ефикасношћу, добијамо:

$$\text{Приход} = 250\eta\pi_7 + 250\eta\pi_8 + 250\eta\pi_9 + 250\eta\pi_{10},$$

где π_i представља цену енергије у часу i .

Пошто је трошак складиштења енергије 40 037 \$, имамо следећи израз за критичну ефикасност:

$$\eta = \frac{40\,037}{250(\pi_7 + \pi_8 + \pi_9 + \pi_{10})} = 66,33\%.$$

Исти резултат може се добити методом покушаја и грешке у spreadsheet-у из фајла *P4-12.xls*.

5 Сигурност система и помоћне услуге

Задатак 5.1

Електроенергетски систем се снабдева из три производне јединице називних снага 150, 200 и 250 MW. Колико је максимално оптерећење које се може безбедно прикључити на систем ако се истовремени испад две јединице не сматра вероватним догађајем?

Решење

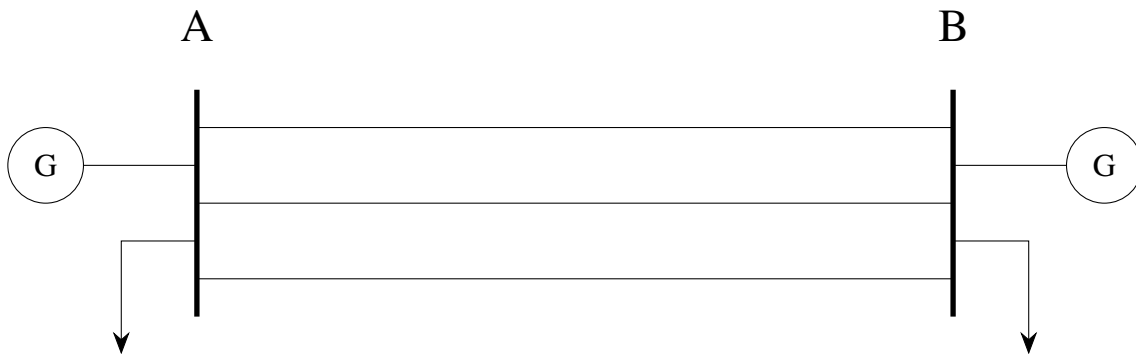
Ако се истовремени испад две јединице не сматра вероватним, најгори случај који разматрамо је испад *највеће* јединице. У тим условима, безбедно се може снабдети оптерећење једнако збиру преостале две максималне снаге:

$$P_A^{\max} + P_B^{\max} = 150 + 200 = 350 \text{ MW}.$$

Задатак 5.3

Мали електроенергетски систем састоји се од две сабирнице повезане са три преносна вода. Под претпоставком да систем мора да ради по критеријуму $N-1$ и да је рад ограничен искључиво термичким лимитима водова, израчунати **максималан пренос снаге** између ове две сабирнице за сваку од следећих ситуација:

- а) Сва три вода су у погону и сваки има трајно подносиви преносни капацитет од 300 MW.
- б) У погону су само два вода, истих карактеристика као у а).
- в) Сва три вода су у погону. Два имају трајно подносиви преносни капацитет од 300 MW, а трећи 200 MW.
- г) Сва три вода су у погону и сваки има трајно подносиви преносни капацитет 300 MW. Током ванредних стања дозвољено је преоптерећење од 10% у трајању 20 мин. Генератори на пријемној сабирници могу да повећавају снагу брзином 4 MW/min.
- д) Исти услови као у г), али генератори могу да подижу снагу само 2 MW/min.
- ђ) Ниска температура и јак ветар побољшавају одвођење топлоте са проводника. Динамичка оптеретљивост повећава и трајно подносиве и краткотрајно подносиве преносне капацитете из г) за 15%.



Слика 16: Две сабирнице повезане са три вода; на спољним странама сабирница су генератори и потрошње.

Решење

Напомена: По $N-1$ критеријуму, максимални сигуран пренос се одређује тако да у случају испада једног вода преостали водови не прекорачују дозвољене лимите.

- а) Сва три вода по 300 MW. У случају испада једног вода, остају *два* вода:

$$P_{\max} = (3 - 1) \times 300 = 600 \text{ MW}.$$

- б) У погону су само два вода од 300 MW. За $N-1$ мора се пренети оптерећење једним водом:

$$P_{\max} = (2 - 1) \times 300 = 300 \text{ MW}.$$

в) Два вода по 300 MW и један од 200 MW. Најгори случај је испад *једног* од водова од 300 MW, па остају 300 + 200:

$$P_{\max} = 300 + 200 = 500 \text{ MW}.$$

г) Сва три вода 300 MW, али је дозвољено +10% преоптерећење у трајању 20 минута. После испада једног вода, преостала два могу краткотрајно да пренесу:

$$P_{\text{emg}} = (300 + 300) \times 1,1 = 660 \text{ MW}.$$

За 20 минута генератори на пријему могу да подигну снагу брзином 4 MW/min, тј.

$$\Delta P_{\text{gen}} = 4 \times 20 = 80 \text{ MW}.$$

Пошто је потенцијално повећање производње (80 MW) веће од краткотрајног преоптерећења које водови трпе (разлика 660 – 600 = 60 MW), преоптерећење се може отклонити у року, те је

$$P_{\max} = 660 \text{ MW}.$$

д) Исто као г), али стопа подизања снаге = 2 MW/min. За 20 минута:

$$\Delta P_{\text{gen}} = 2 \times 20 = 40 \text{ MW}.$$

То је мање од потребних 60 MW да би се отклонио ток изнад трајно подносивог преносног капацитета, па пренос ограничава управо способност генератора да повећа снагу:

$$P_{\max} = 600 + 40 = 640 \text{ MW}.$$

ђ) Динамичка оптеретљивост: сви лимити из г) расту за 15%. Трајно подносиви преносни капацитет два преостала вода постаје:

$$P_{\text{cont}} = (300 + 300) \times 1,15 = 690 \text{ MW},$$

а краткотрајни (20 минута) лимит:

$$P_{\text{emg}} = 690 \times 1,1 = 759 \text{ MW}.$$

Разлика између краткотрајног и трајног лимита је 759 – 690 = 69 MW, што је *мање* од онога што генератори могу да подигну за 20 минута при 4 MW/min (80 MW). Дакле, ограничење је краткотрајни лимит водова те:

$$P_{\max} = 759 \text{ MW}.$$

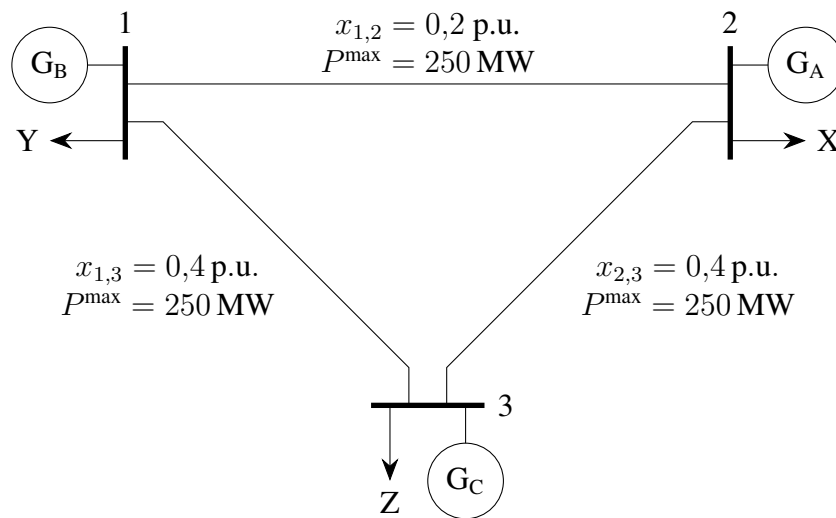
6 Преносна мрежа и тржиште електричне енергије

Задатак 6.1

Разматра се електроенергетски систем са три сабирнице приказан на Слици 17. Једина ограничења у мрежи потичу од термичких капацитета преносних водова. Реактивни токови се могу занемарити. Проверити да ли су скупови трансакција из Табеле 30 истовремено изводљиви.

Табела 30: Скупови трансакција за задатак 6.1

	Продавац	Купац	Снага [MW]
Скуп 1	B	X	200
	A	Z	400
	C	Y	300
Скуп 2	B	Z	600
	A	X	300
	A	Y	200
	A	Z	200
Скуп 3	C	X	1000
	X	Y	400
	B	C	300
	A	C	200
	A	Z	100



Слика 17: Мали електроенергетски систем за задатак 6.1

Решење

Следеће једначине баланса снага за овај систем су (први Кирхофов закон):

$$\text{Сабирница 1: } B - Y = F_{12} + F_{13},$$

$$\text{Сабирница 2: } A - X = -F_{12} + F_{23},$$

$$\text{Сабирница 3: } C - Z = -F_{13} - F_{23}.$$

Коришћењем другог Кирхофовог закона за петљу добија се и:

$$F_{12} x_{12} + F_{23} x_{23} - F_{13} x_{13} = 0.$$

Имамо три непознате (F_{12} , F_{13} , F_{23}) и четири једначине, али три једначине баланса нису линеарно независне (њихов збир је нула). Да бисмо добили систем од три независне једначине, комбинујемо две једначине баланса (нпр. за сабирнице 1 и 2) и једначину за петљу. У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B - Y \\ A - X \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сет 1. Тада је

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 - 300 \\ 400 - 200 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решавањем добијамо:

$$\begin{aligned} F_{12} &= -120 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{12}| \leq 250 \text{ MW}, \\ F_{13} &= 20 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{13}| \leq 250 \text{ MW}, \\ F_{23} &= 80 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{23}| \leq 250 \text{ MW}. \end{aligned}$$

Ове трансакције су, дакле, истовремено изводљиве.

Сет 2. Линеарни систем је

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 - 200 \\ 700 - 300 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решење је:

$$\begin{aligned} F_{12} &= 0 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{12}| \leq 250 \text{ MW}, \\ F_{13} &= 400 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{13}| \geq 250 \text{ MW}, \\ F_{23} &= 400 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{23}| \geq 250 \text{ MW}. \end{aligned}$$

Ове трансакције *нису* истовремено изводљиве (прекорачен лимит водова 1–3 и 2–3).

Сет 3. Добија се

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 - 400 \\ 300 - 600 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$\begin{aligned} F_{12} &= 80 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{12}| \leq 250 \text{ MW}, \\ F_{13} &= -180 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{13}| \leq 250 \text{ MW}, \\ F_{23} &= -220 \text{ MW} &\Rightarrow & |F_{23}| \leq 250 \text{ MW}. \end{aligned}$$

Ове трансакције су истовремено изводљиве.

Задатак 6.2

Разматра се електроенергетски систем са два чвора (Слика 18). Маргинални трошкови производње генератора прикључених на сабирнице A и B су:

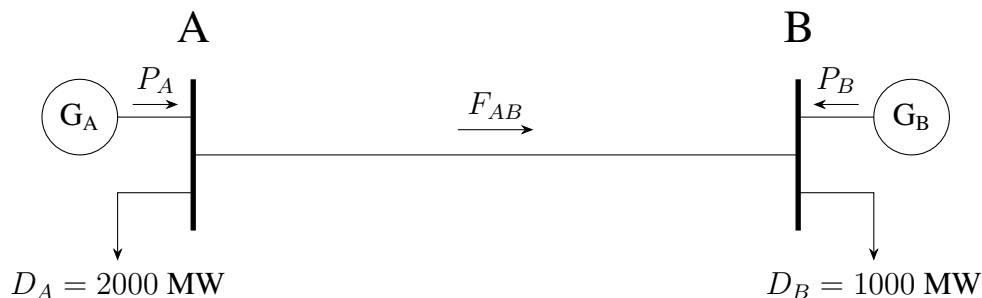
$$MC_A = 20 + 0,03 P_A \text{ [$/MWh]}, \quad MC_B = 15 + 0,02 P_B \text{ [$/MWh]}.$$

Потрошње су:

$$D_A = 2000 \text{ MW}, \quad D_B = 1000 \text{ MW}.$$

Претпоставити да је потражња константна и неосетљива на цену, да се енергија продаје по маргиналном трошку производње и да нема ограничења снаге генератора осим ако је посебно наведено. Одредити цену електричне енергије на свакој сабирници (чвору), производњу сваког генератора и ток по воду F_{AB} за случајеве:

- вод између A и B је прекинут;
- вод је у погону и има неограничени капацитет;
- вод је у погону и има неограничени капацитет, али је максимум генератора B $P_B^{\max} = 1500 \text{ MW}$;
- вод је у погону и има неограничени капацитет, али је максимум генератора A $P_A^{\max} = 900 \text{ MW}$; излаз генератора B је неограничен;
- вод је у погону, али је њен капацитет ограничен на 600 MW ; излази генератора су неограничени.



Слика 18: Двосабирнички систем за задатак 6.2 ($F_{AB} > 0$ значи ток из A ка B).

Решење

а) Овај случај се посматра као два независна система, сваки са сопственом потрошњом и производњом. За област A производња је $P_A = 2000 \text{ MW}$ и цена:

$$\pi_A = 20 + 0,03 \times 2000 = 80 \text{ \$/MWh}.$$

За област B производња је $P_B = 1000 \text{ MW}$ и цена:

$$\pi_B = 15 + 0,02 \times 1000 = 35 \text{ \$/MWh}.$$

б) У овом случају маргинални трошак свих генератора једнак је цени електричне енергије, а укупна производња једнака је збирној потрошњи система. Пишемо:

$$\pi = 20 + 0,03 \cdot P_A, \quad \pi = 15 + 0,02 \cdot P_B, \quad P_A + P_B = 3000.$$

У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} 0,03 & 0 & -1 \\ 0 & 0,02 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -15 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

Добијамо:

$$P_A = 1100 \text{ MW}, \quad P_B = 1900 \text{ MW}, \quad \pi = 53 \text{ \$/MWh}.$$

Даље, ток од A ка B је

$$F_{AB} = P_A - D_A = 1100 - 2000 = -900 \text{ MW}.$$

в) Из **б)** видимо да без ограничења преноса важи $P_B = 1900 \text{ MW}$. Ако се P_B ограничи на максимум 1500 MW , онда је

$$P_A = 3000 - P_B = 1500, \quad F_{AB} = 1500 - 2000 = -500 \text{ MW}.$$

Из израза за маргинални трошак добијамо цену у A :

$$\pi_A = 20 + 0,03 (1500) = 65 \text{ \$/MWh}.$$

Пошто је генератор у B на максимуму, он постаје инфрамаргиналан; сваки додатни MW за B обезбедиће A , па је и цена у B :

$$\pi_B = 65 \text{ \$/MWh}.$$

г) Вод има неограничен капацитет, али $P_A^{\max} = 900 \text{ MW}$ (генератор у B није ограничен).

$$P_A = 900 \text{ MW}, \quad P_B = 3000 - 900 = 2100 \text{ MW}, \quad F_{AB} = 900 - 2000 = -1100 \text{ MW}.$$

Цена у B је

$$\pi_B = 15 + 0,02 (2100) = 57 \text{ \$/MWh}.$$

Како је генератор у A на максимуму, следећи MW у A коштао би исто: $\pi_A = 57 \text{ \$/MWh}$.

д) Из **б)** знамо да би без ограничења важило $F_{AB} = -900 \text{ MW}$. Сада је капацитет вода ограничен: $|F_{AB}| \leq 600 \text{ MW} \Rightarrow F_{AB} = -600 \text{ MW}$ (600 MW из B ка A). Тада је

$$P_A = D_A + F_{AB} = 2000 - 600 = 1400 \text{ MW}, \quad P_B = 3000 - P_A = 1600 \text{ MW}.$$

Цене према граничним трошковима:

$$\pi_A = 20 + 0,03 \times 1400 = 62 \text{ \$/MWh}, \quad \pi_B = 15 + 0,02 \times 1600 = 47 \text{ \$/MWh}.$$

Задатак 6.3

Израчунати приходе генератора и трошкове потрошача за све случајеве разматране у Задатку 6.2. Ко има користи од вода који повезује ова два чвора?

Решење

Табела 31: Приходи генератора и плаћања потрошача (случајеви из Задатка 6.2)

	а)	б)	в)	г)	д)
Плаћања потрошача у А $E_A = D_A \pi_A$ (\$)	160 000	106 000	130 000	114 000	124 000
Плаћања потрошача у В $E_B = D_B \pi_B$ (\$)	35 000	53 000	65 000	57 000	47 000
Приход генератора А $R_A = P_A \pi_A$ (\$)	160 000	58 300	97 500	51 300	86 800
Приход генератора В $R_B = P_B \pi_B$ (\$)	35 000	100 700	97 500	62 700	75 200

Највећу корист од вода између чворова имају генератор у В и потрошачи у А, јер ток по воду повећава цену у В а снижава је у А.

Задатак 6.4

Одредити добит услед загушења (енгл. *Congestion Surplus*) за случај д) из Задатка 6.2. Проверити резултат користећи исходе из Задатка 6.3. За које вредности тока по воду између сабирница A и B је добит услед загушења једнак нули?

Решење

Добит услед загушења је разлика између укупног трошка потрошача и укупног прихода произвођача:

$$ДЗ = (D_A \pi_A + D_B \pi_B) - (P_A \pi_A + P_B \pi_B).$$

Преформулисањем претходног израза добијамо:

$$ДЗ = (D_A - P_A) \pi_A + (D_B - P_B) \pi_B.$$

Пошто је $D_A - P_A = -F_{AB}$ и $D_B - P_B = F_{AB}$, следи:

$$ДЗ = F_{AB} (\pi_B - \pi_A).$$

За случај д) из Задатка 6.2 важи $F_{AB} = -600 \text{ MW}$, $\pi_A = 62 \text{ \$/MWh}$, $\pi_B = 47 \text{ \$/MWh}$. Зато:

$$ДЗ = F_{AB} (\pi_B - \pi_A) = (-600) \times (47 - 62) = 9\,000 \text{ \$}.$$

Провера помоћу резултата из Задатка 6.3:

$$ДЗ = E_A + E_B - R_A - R_B = 124\,000 + 47\,000 - 86\,800 - 75\,200 = 9\,000 \text{ \$}.$$

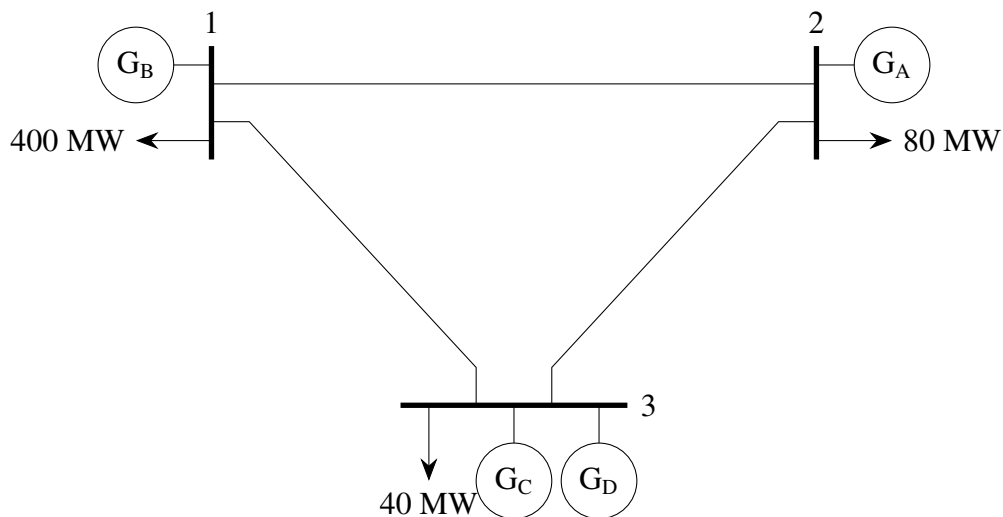
Из израза $ДЗ = F_{AB} (\pi_B - \pi_A)$ се види да је добит услед загушења једнак нули када је $\pi_A = \pi_B$ (једнаке нодалне цене) **или** када је $F_{AB} = 0$ (нема тока по воду).

Задатак 6.5

Размотрити електроенергетски систем приказан на Слици 19. Табела 32 даје податке о генераторима прикљученим на систем. Израчунати “безограничени” економски диспечинг и цене у сваком чвору (нодалне цене) за услове потрошње са Слике 19.

Табела 32: Подаци о генераторима

Генератор	Капацитет [MW]	Маргинални трошак [\$/MWh]
A	150	12
B	200	15
C	150	10
D	400	8

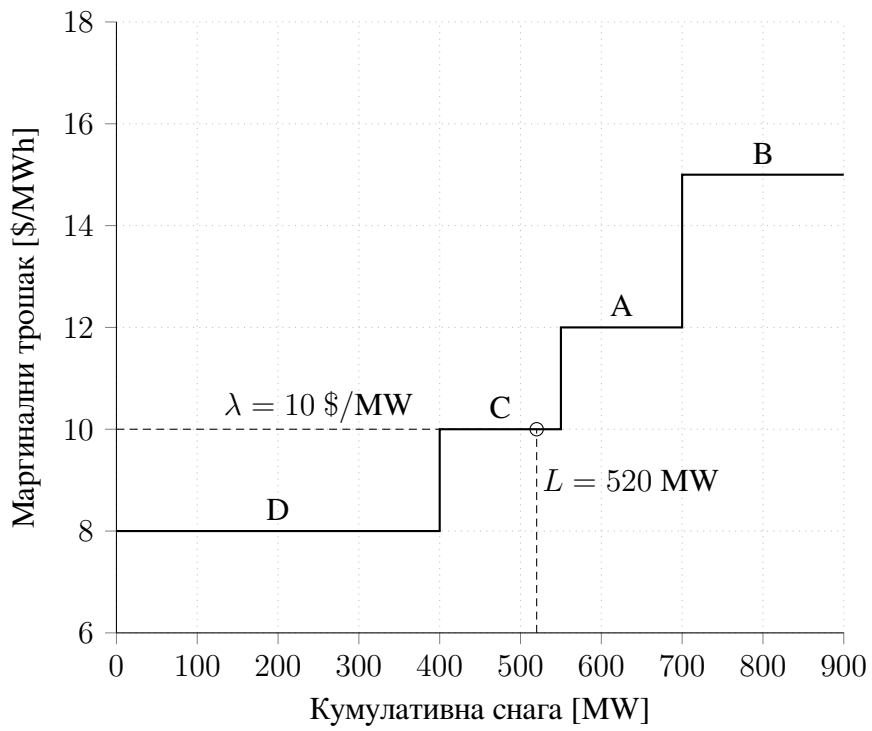


Слика 19: Електроенергетски систем за задатак 6.5

Решење

Пошто нема ограничења преноса, јединице се распоређују по растућем маргиналном трошку. За укупно оптерећење $L = 400 + 40 + 80 = 520$ MW цена је једнака маргиналном трошку последње ангазоване јединице: $\lambda = 10$ \$/MWh. Резултат је:

$$P_D = 400 \text{ MW}, \quad P_C = 120 \text{ MW}, \quad P_A = P_B = 0.$$



Слика 20: Распоред генератора по маргиналном трошку (мерит-ордер крива).

Задатак 6.6

Табела у наставку даје податке о водовима за електроенергетски систем из Задатка 6.5. Користећи принцип суперпозиције, израчунати токове снага по водовима који би настали када су генераторске јединице диспечоване као у Задатку 6.5. Идентификовати сва кршења погонских ограничења.

Табела 33: Подаци о водовима

Вод	Реактанса [р.и.]	Капацитет [MW]
1 - 2	0,2	250
1 - 3	0,3	250
2 - 3	0,3	250

Решење

Слика 21 приказује инјектовања снаге у чворовима за услове економског диспача и како се систем може разложити да би се, применом принципа суперпозиције, израчунали токови по водовима.

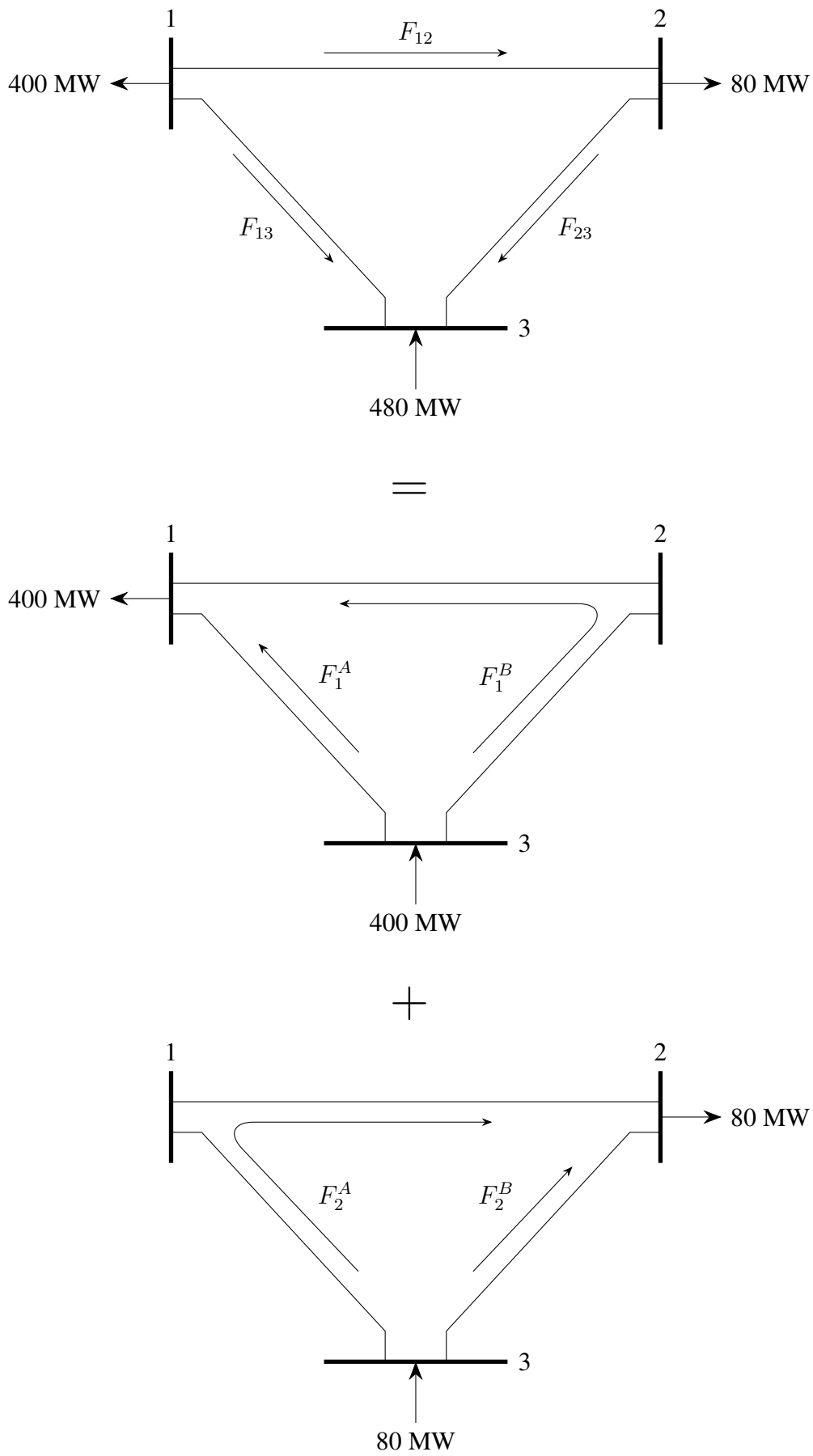
Користећи принцип струјног разделника примењеног на снаге и узимајући у обзир реактансе водова, добијамо:

$$F_1^A = \frac{0,5}{0,8} \times 400 = 250 \text{ MW}, \quad F_1^B = \frac{0,3}{0,8} \times 400 = 150 \text{ MW},$$
$$F_2^A = \frac{0,5}{0,8} \times 80 = 50 \text{ MW}, \quad F_2^B = \frac{0,3}{0,8} \times 80 = 30 \text{ MW}.$$

Комбиновањем ових токова (као на Слици 21) добијамо:

$$F_{12} = -F_1^B + F_2^B = -120 \text{ MW},$$
$$F_{13} = -F_1^A - F_2^B = -280 \text{ MW},$$
$$F_{23} = -F_1^B - F_2^A = -200 \text{ MW}.$$

Ток по воду 1-3, дакле, премашује свој максимални капацитет за 30 MW (пошто је $|F_{13}| = 280 > 250$).



Слика 21: Прва (резултујућа) слика се добија суперпозицијом друге и треће.

Алтернативни приступ

Овај проблем може да се реши и *директно*, применом првог Кирхофовог закона за два чвора и другог Кирхофовог закона за петљу:

$$\text{Чвор 2: } P_A - 80 = -F_{12} + F_{23},$$

$$\text{Чвор 3: } P_C + P_D - 40 = -F_{13} - F_{23},$$

$$\text{Једначина по петљи : } 0,2 F_{12} + 0,3 F_{23} - 0,3 F_{13} = 0.$$

У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0,2 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A - 80 \\ P_C + P_D - 40 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

За расподелу из Задатка 6.5 ($P_A = 0$, $P_B = 0$, $P_C = 120$, $P_D = 400$) добијамо:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0,2 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ 480 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решавањем система следи:

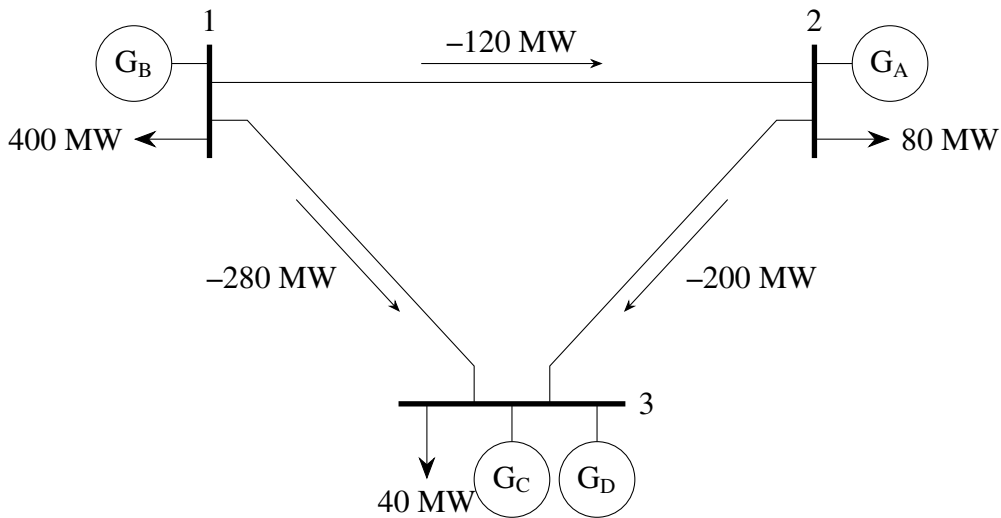
$$F_{12} = -120 \text{ MW}, \quad F_{13} = -280 \text{ MW}, \quad F_{23} = -200 \text{ MW},$$

што се слаже са решењем добијеним суперпозицијом.

Задатак 6.7

Одредити два начина да се уклоне прекорачења ограничења идентификована у Задатку 6.6 редиспечингом генератора. Који редиспечинг је пожељнији?

Решење

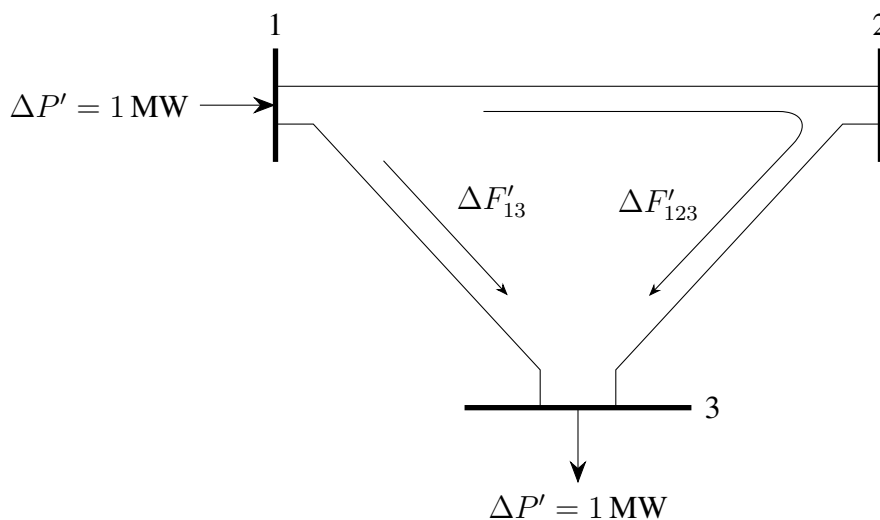


Слика 22: Токови снага из задатка 6.6

Метод 1. Повећати излаз генератора B , а за исти износ смањити излаз генератора C . (Смањивати D није пожељно јер је јефтинији од C .) Да бисмо одредили колико треба повећати излаз B да би се уклонило прекорачење на воду $3-1$, посматрамо инјектирање $+1$ MW у чвору 1 и -1 MW у чвору 3. Тај пар инјектирања расподели ток на мрежи овако:

$$\Delta F'_{123} = \frac{x_{13}}{(x_{12} + x_{23}) + x_{13}} \times \Delta P' = \frac{0,3}{(0,2 + 0,3) + 0,3} \times 1 = 0,375 \text{ MW} \quad \text{по путањи } 1-2-3$$

$$\Delta F'_{13} = \frac{(x_{12} + x_{23})}{(x_{12} + x_{23}) + x_{13}} \times \Delta P' = \frac{(0,2 + 0,3)}{(0,2 + 0,3) + 0,3} \times 1 = 0,625 \text{ MW} \quad \text{по путањи } 1-3$$



Слика 23: Измештање производње 1 MW са генератора C на генератор B

Како је модел линеаран (DC модел), да би се уклонили прекорачење од 30 MW на воду 3–1, мора се повећати излаз генератора B за:

$$\frac{\Delta P_B}{\Delta F_{13}} = \frac{\Delta P'}{\Delta F'_{13}} \implies \Delta P_B = \frac{\Delta P'}{\Delta F'_{13}} \times \Delta F_{13} = \frac{1 \text{ MW}}{0,625 \text{ MW}} \times 30 \text{ MW} = 48 \text{ MW}.$$

Зато је редиспечинг:

$$P_A = 0 \text{ MW}, \quad P_B = 48 \text{ MW}, \quad P_C = 72 \text{ MW}, \quad P_D = 400 \text{ MW}.$$

Токове можемо израчунати или једначинама из Задатка 6.6, или преко промена услед инјектирања +48 MW у чвору 1 и –48 MW у чвору 3:

$$F_{12} = -120 + 0,375 \times 48 = -102 \text{ MW},$$

$$F_{23} = -200 + 0,375 \times 48 = -182 \text{ MW},$$

$$F_{13} = -280 + 0,625 \times 48 = -250 \text{ MW}.$$

(Нема нових прекорачења на осталим водовима.)

Алтернативно, применом првог и другог Кирхофовог закона добијамо систем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0,2 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_B - 400 \\ P_C + P_D - 40 \\ 0 \end{bmatrix},$$

који за $P_B = 48$, $P_C = 72$, $P_D = 400$ даје исте токове.

Цена овог редиспечинга је:

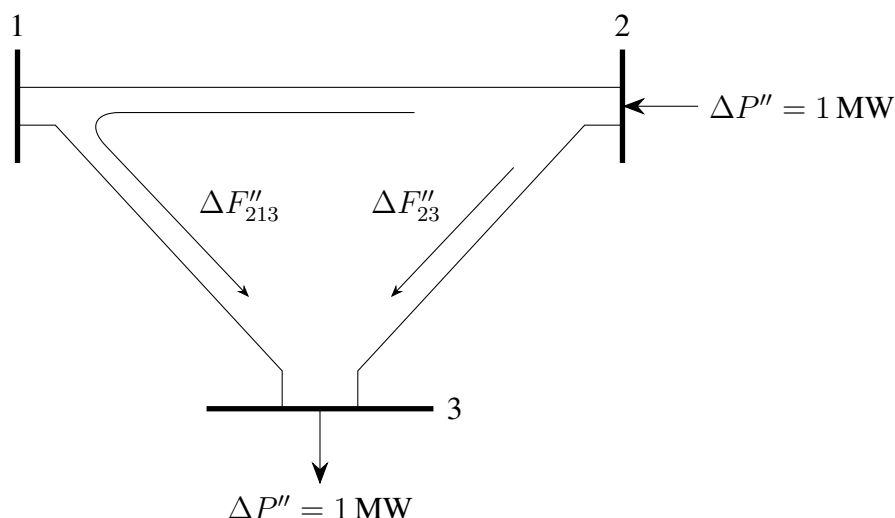
$$C_{\text{total}} = 48 \times 15 + 72 \times 10 + 400 \times 8 = \$ 4 640,$$

што је повећање од \$ 240 у односу на случај без мрежних ограничења.

Метод 2. Повећати производњу генератора A , а за исти износ смањити производњу генератора C . Да бисмо уклонили прекорачење на воду 3–1, посматрамо инјектирање +1 MW у чвору 2 и –1 MW у чвору 3. Расподела по мрежи је:

$$\Delta F''_{213} = \frac{x_{23}}{(x_{12} + x_{13}) + x_{23}} \times \Delta P'' = \frac{0,3}{(0,2 + 0,3) + 0,3} \times 1 = 0,375 \text{ MW} \quad \text{по путањи 2–1–3}$$

$$\Delta F''_{23} = \frac{(x_{12} + x_{13})}{(x_{12} + x_{13}) + x_{23}} \times \Delta P'' = \frac{(0,2 + 0,3)}{(0,2 + 0,3) + 0,3} \times 1 = 0,625 \text{ MW} \quad \text{по путањи 2–3}$$



Слика 24: Измештање производње 1 MW са генератора C на генератор A

Да би се уклонило прекорачење од 30 MW на воду 3–1, мора се повећати излаз генератора A за:

$$\frac{\Delta P_A}{\Delta F_{13}} = \frac{\Delta P''}{\Delta F''_{213}} \implies \Delta P_A = \frac{\Delta P''}{\Delta F''_{213}} \times \Delta F_{13} = \frac{1 \text{ MW}}{0,375 \text{ MW}} \times 30 \text{ MW} = 80 \text{ MW}.$$

Зато је редиспечинг:

$$P_A = 80 \text{ MW}, \quad P_B = 0 \text{ MW}, \quad P_C = 40 \text{ MW}, \quad P_D = 400 \text{ MW}.$$

Токови (промене услед +80 MW у чвору 2 и –80 MW у чвору 3) су:

$$\begin{aligned} F_{12} &= -120 - 0,375 \times 80 = -150 \text{ MW}, \\ F_{23} &= -200 + 0,625 \times 80 = -150 \text{ MW}, \\ F_{13} &= -280 + 0,375 \times 80 = -250 \text{ MW}. \end{aligned}$$

И овде нема нових прекорачења.

У матричном облику (са $P_A = 80$, $P_C = 40$, $P_D = 400$):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0,2 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A - 80 \\ P_C + P_D - 40 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix},$$

што даје исте вредности токова као горе.

Цена овог редиспечинга је:

$$C_{\text{total}} = 80 \times 12 + 40 \times 10 + 400 \times 8 = \$ 4560,$$

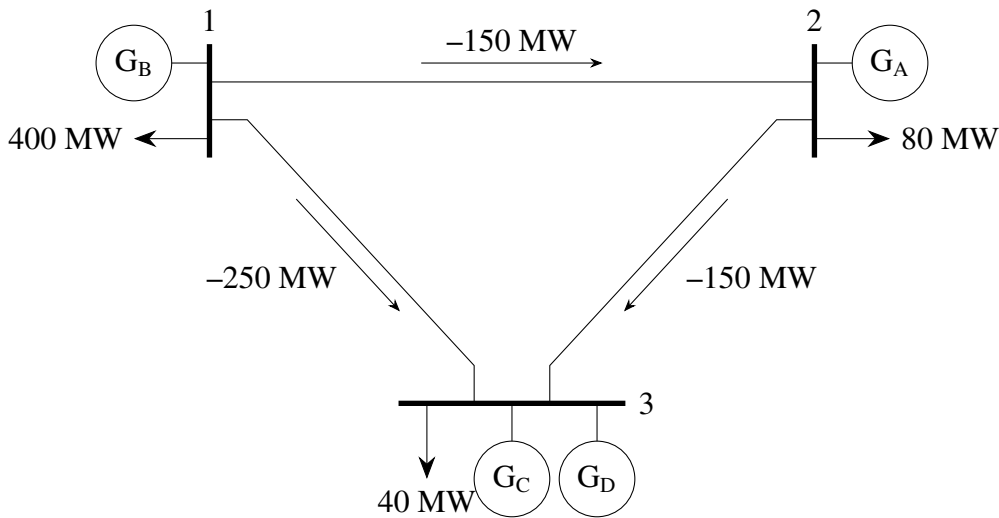
што је повећање од \$ 160 у односу на случај без ограничења. Иако овај редиспечинг премешта већи број MW, *једнотинији* је од првог; стога је **пожељнији**, односно оптималан редиспечинг под ограничењима.

Задатак 6.8

Израчунати нодалне цене за тросабирнички систем из задатка 6.5 и 6.6 када су генератори оптимално редиспачовани да уклоне прекорачења из Задатка 6.7. Затим израчунати трговински суфицит (енгл. *Merchandising Surplus*) и показати да је једнак збиру суфицита по појединим водовима.

Решење

Нодална цена у сваком чвору је једнака маргиналном трошку који прави повећање потрошње од 1 MW у том чвору.



Слика 25: Токови снага за оптимални редиспечинг из Задатка 6.7

Цена у чвору 3. Следећи 1 MW потрошње у чвору 3 би локално произвео генератор C (најјефтинији који није на техничком максимуму), па је

$$\pi_3 = 10 \text{ \$/MWh.}$$

Цена у чвору 2. Додатни 1 MW у чвору 2 мора да произведе генератор A (генератор C би прекршио лимит на воду 3–1; генератор B је скупљи од A). Зато је

$$\pi_2 = 12 \text{ \$/MWh.}$$

Цена у чвору 1. Додатни 1 MW у чвору 1 захтева редиспечинг $A-C$ тако да се ток на воду 3–1 не промени (већ је на лимиту). Размотримо инјектирање +1 MW у чвору 1 и –1 MW у чвору 3; промене токова добијамо из:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0,2 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_{12} \\ \Delta F_{13} \\ \Delta F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta F_{31} = 0,625 \text{ MW.}$$

Слично, за инјектирање +1 MW у чвору 1 и –1 MW у чвору 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_{12} \\ \Delta F_{13} \\ \Delta F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta F_{31} = 0,250 \text{ MW.}$$

Да би F_{31} остао непромењен:

$$0 = \Delta F_{31} = 0,625 \Delta P_C + 0,250 \Delta P_A, \quad \Delta P_A + \Delta P_C = 1,$$

па решавањем добијамо

$$\Delta P_C = -0,667 \text{ MW}, \quad \Delta P_A = 1,667 \text{ MW}.$$

Нодална цена у чвору 1 је линеарна комбинација маргиналних трошкова A и C :

$$\pi_1 = -0,667 \times 10 + 1,667 \times 12 = 13,33 \text{ \$/MWh}.$$

Резиме и трговински суфицит.

$$\pi_1 = 13,33 \text{ \$/MWh}, \quad \pi_2 = 12 \text{ \$/MWh}, \quad \pi_3 = 10 \text{ \$/MWh}.$$

Табела 34: Трговински суфицит рачунат по чворовима

	1	2	3	Укупно
Производња [MW]	0	80	440	520
Потрошња [MW]	400	80	40	520
Цена [\$/MWh]	13,33	12	10	
Уплате потрошача [\$]	5 332	960	400	6 692
Приход генератора [\$]	0	960	4 400	5 360
Трговински суфицит [\$]				1 332

Табела 35: Трговински суфицит рачунат по водовима

	2 → 1	3 → 1	3 → 2	Укупно
Ток [MW]	150	250	150	
Цена у изворном чвору [\$/MWh]	12	10	10	
Цена у пријемном чвору [\$/MWh]	13,33	13,33	12	
Трговински суфицит по водовима [\$]	-199,5	-832,5	-300	1 332

Збир суфицита по водовима једнак је укупном трговинском суфициту: 1 332 \$.

Задатак 6.9

Размотрити тросабирнички систем из задатака 6.5 и 6.6. Нека је дозвољени ток по воду 1–2 смањен на 140 MW, док лимити осталих водова остају исти. Одредити оптималан редиспечинг и нодалне цене за ове услове. *Савет:* оптимално решење подразумева редиспечинг генератора у сва три чвора.

Решење

Пре промене лимита на воду 1–2 (у решењу Задатка 6.7) важило је:

$$F_{12} = -150 \text{ MW}, \quad F_{13} = -250 \text{ MW}, \quad F_{23} = -150 \text{ MW}.$$

Нови лимит $|F_{12}| \leq 140 \text{ MW}$ ће бити уједно и оптимални ток (као и ток на 1–3). Постављамо:

$$F_{12} = -140 \text{ MW}, \quad F_{13} = -250 \text{ MW}.$$

Трећи ток добијамо применом другог Кирхофовог закона за петљу:

$$0,2 F_{12} + 0,3 F_{23} - 0,3 F_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \frac{0,3 F_{13} - 0,2 F_{12}}{0,3} = -156,67 \text{ MW}.$$

Из баланса снаге по чворовима:

$$\text{Чвор 2: } P_A - 80 = -F_{12} + F_{23} \quad \Rightarrow \quad P_A = -F_{12} + F_{23} + 80 = 63,33 \text{ MW},$$

$$\text{Чвор 3: } P_C + P_D - 40 = -F_{13} - F_{23} \quad \Rightarrow \quad P_C + P_D = -F_{13} - F_{23} + 40 = 446,67 \text{ MW},$$

$$\text{Чвор 1: } P_B - 400 = F_{12} + F_{13} \quad \Rightarrow \quad P_B = F_{12} + F_{13} + 400 = 10 \text{ MW}.$$

Како је D јефтинији од C , прво се активира D до максимума:

$$P_D = 400 \text{ MW}, \quad P_C = (P_C + P_D) - P_D = 46,67 \text{ MW}.$$

Пошто имамо два активирана ограничења на водовима, у систему су $2 + 1 = 3$ делимично оптерећена генератора (по један у сваком чвору), па су нодалне цене једнаке маргиналним трошковима тих генератора:

$$\pi_1 = MC_B = 15 \text{ \$/MWh}, \quad \pi_2 = MC_A = 12 \text{ \$/MWh}, \quad \pi_3 = MC_C = 10 \text{ \$/MWh}.$$