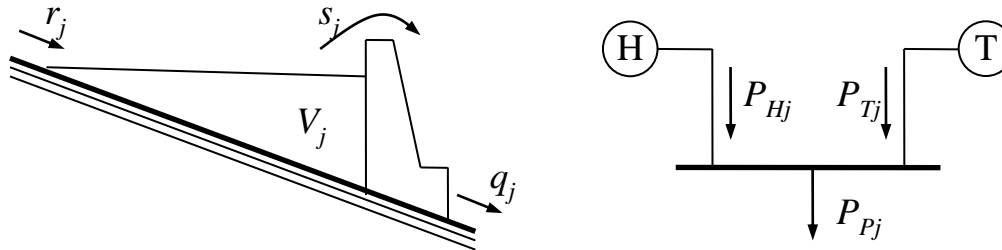


Eksploatacija EES-a

Ekonomski proračuni u eksploataciji
elektroenergetskih sistema
(Hidro – termo koordinacija)

Hidro – termo koordinacija

- Analiziraće se kratkoročni problem hidro – termo koordinacije gde se zahteva da se određena količina vode koristi na takav način da se minimiziraju troškovi rada termalnih jedinica.
- Ilustracija problema data je na slici. Radi jednostavnosti posmatraće se samo jedna termalna jedinica. Ona može da predstavlja i ekvivalent više termalnih jedinica.



j – interval

r_j – dotok vode u akumulaciju u toku perioda j

V_j – zapremina vode u akumulaciji na kraju perioda j

q_j – protok kroz turbinu u toku perioda j

s_j – preliv i ostali gubici vode u toku perioda j

P_{Hj} – proizvodnja HE u toku perioda j

P_{Tj} – proizvodnja TE u toku perioda j

P_{Pj} – potrošnja u toku perioda j

Hidro – termo koordinacija

- Optimizacioni problem se može definisati kao minimizacija troškova proizvodnje termo agregata u toku razmatranog perioda uz zadovoljenje ograničenja.
- Funkcija cilja (kriterijumska funkcija) je:

$$\min F_T = \sum_{j=1}^M n_j F_j$$

- Ograničenja koja se moraju zadovoljiti su:
 - ograničenje po protoku

$$\sum_{j=1}^M n_j q_j = q_{tot} \quad q_{\min} \leq q_j \leq q_{\max}$$

- balansna jednačina po snagama

$$P_{Pj} - P_{Hj} - P_{Tj} = 0$$

- početni i krajnji uslovi stanja akumulacije

$$V_j \Big|_{j=0} = V_{POC} \quad V_j \Big|_{j=M} = V_{KRAJ}$$

Hidro – termo koordinacija

- Veličina n_j u prethodnim jednačinama predstavlja dužinu trajanja intervala j u satima, a V_{POC} i V_{KRAJ} su početna i krajnja zapremina akumulacije.
- Može se pretpostaviti da HE radi sa konstantnim padom i da je dostupna karakteristika protoka u funkciji snage:

$$q = q(P_H)$$

- Postavljeni problem može se rešiti primenom različitih metoda. Neke od njih su:
 - λ - γ iterativni metod
 - metod linearnog programiranja
 - metod dinamičkog programiranja.

Hidro – termo koordinacija

λ - γ iterativni metod

- Na osnovu postavljenog problema može se formirati Lagranžova funkcija:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^M \left[n_j F(P_{Tj}) + \lambda_j (P_{Pj} - P_{Hj} - P_{Tj}) \right] + \gamma \left[\sum_{j=1}^M n_j q_j(P_{Hj}) - q_{tot} \right]$$

- Za određeni interval $j = k$ važi da je:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Tk}} = 0, \text{ odnosno } n_k \frac{dF_{Tk}}{dP_{Tk}} = \lambda_k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Hk}} = 0, \text{ odnosno, } \gamma n_k \frac{dq_k}{dP_{Hk}} = \lambda_k$$

- Ovako definisani sistem jednačina može da se reši primenom neke matematičke metode.

Hidro – termo koordinacija

λ - γ iterativni metod

- Prethodno definisani model može da se proširi uvođenjem gubitaka aktivne snage u prenosnoj mreži. U tom slučaju jednačina bilansa po snagama postaje

$$P_{Pj} + P_{Gj} - P_{Hj} - P_{Tj} = 0$$

gde je P_{Gj} snaga gubitaka u intervalu j .

- Lagranžova funkcija je sada:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^M \left[n_j F(P_{Tj}) + \lambda_j (P_{Pj} + P_{Gj} - P_{Hj} - P_{Tj}) \right] + \gamma \left[\sum_{j=1}^M n_j q_j(P_{Hj}) - q_{tot} \right]$$

- Nalaženjem parcijalnih izvoda po promenljivim i njihovo izjednačavanje sa nulom daje jednačine:

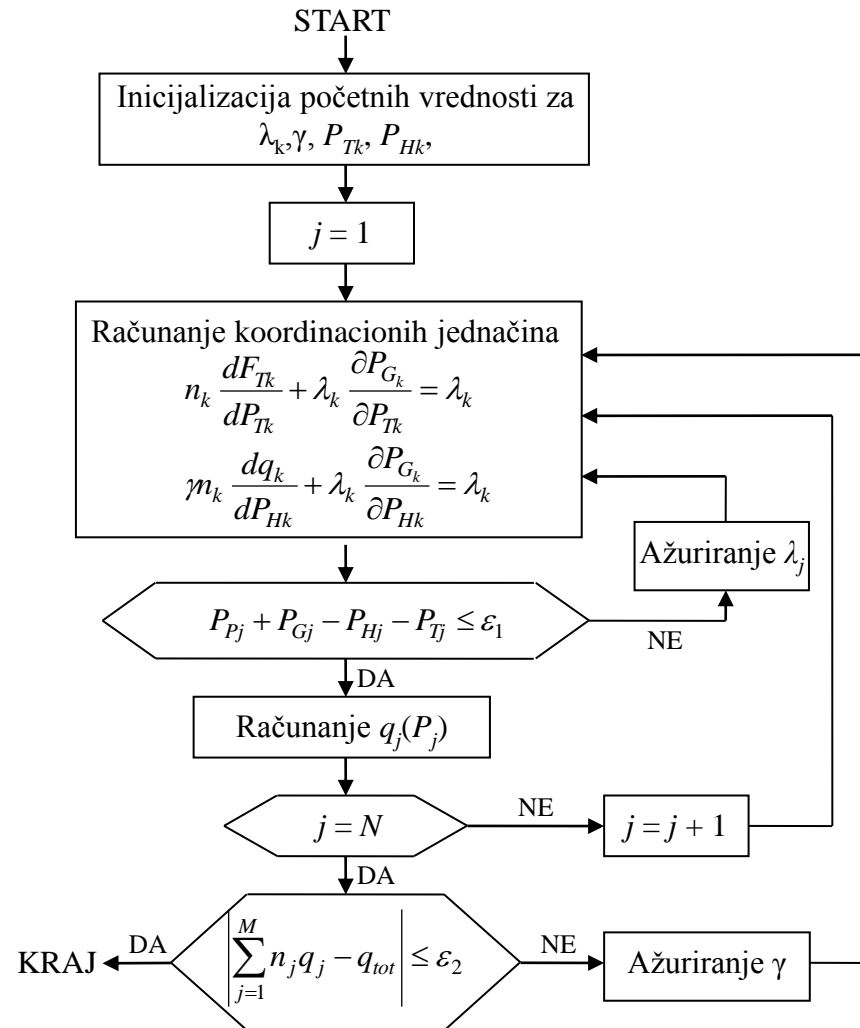
$$n_k \frac{dF_{Tk}}{dP_{Tk}} + \lambda_k \frac{\partial P_{Gk}}{\partial P_{Tk}} = \lambda_k$$

$$\gamma n_k \frac{dq_k}{dP_{Hk}} + \lambda_k \frac{\partial P_{Gk}}{\partial P_{Hk}} = \lambda_k$$

Hidro – termo koordinacija

λ - γ iterativni metod

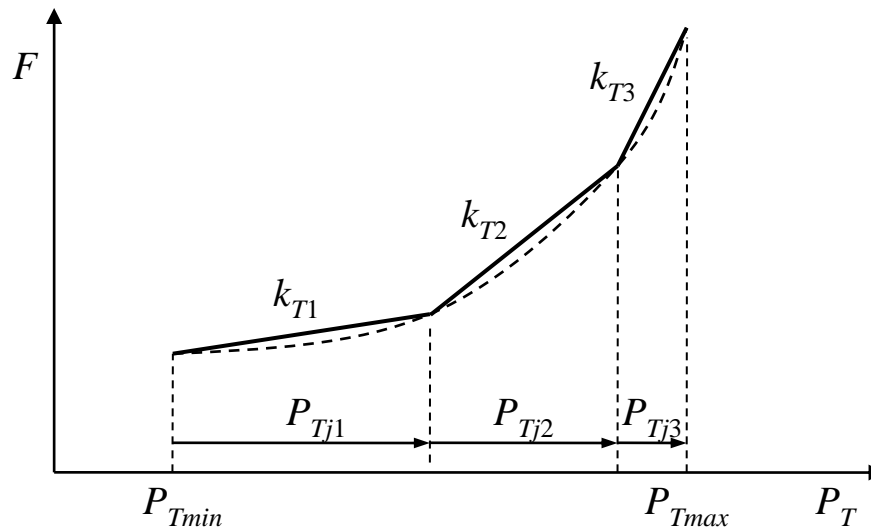
- Ovaj problem je dosta složeniji nego prethodni i rešava se iterativnim putem.
- Algoritam za rešavanje dat je na slici.



Hidro – termo koordinacija

Linearno programiranje

- Kod linearnog programiranja (LP) svaki model treba da se predstavi u linearnoj formi.
- Kriva troškova termo agregata može da se predstavi kao deo po deo linearna funkcija troškova kao što je prikazano na slici.



Hidro – termo koordinacija

Linearno programiranje

- Prikazana tri segmenta su modelovana sa veličinama P_{Tj1} , P_{Tj2} i P_{Tj3} . pri čemu se snaga svakog segmenta k meri od početka tog segmenta. Svaki segment ima svoj nagib (k_{T1} , k_{T2} i k_{T3}).
- Prema tome funkcija troškova u intervalu j , može da se napiše u obliku:

$$F(P_{Tj}) = F(P_{T \min}) + k_{T1}P_{Tj1} + k_{T2}P_{Tj2} + k_{T3}P_{Tj3}$$

gde za svaki segment važi da je:

$$0 \leq P_{Tjk} \leq P_{Tjk}^{\max}, \quad k = 1, 2, 3$$

- Ukupna proizvodnja TE u intervalu j je sada:

$$P_{Tj} = P_{T \min} + P_{Tj1} + P_{Tj2} + P_{Tj3}$$

Hidro – termo koordinacija

Linearno programiranje

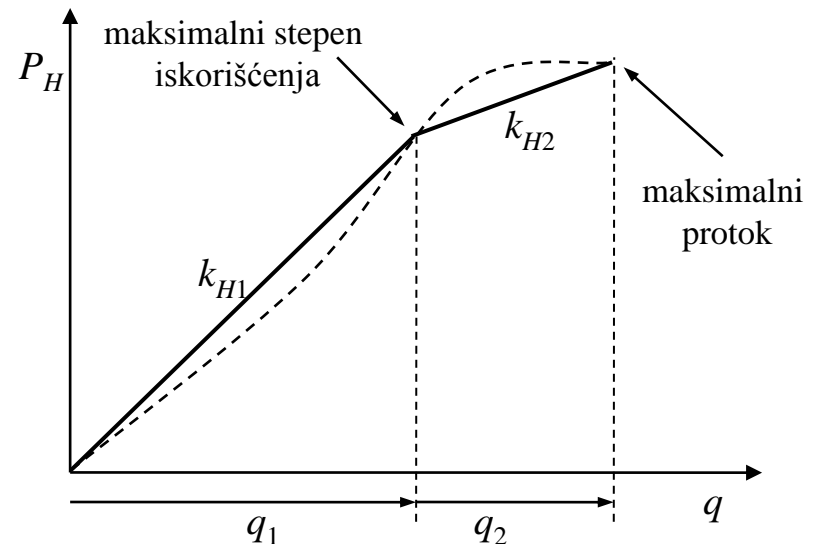
- Funkcija snage HE od protoka se takođe može modelovati kao deo po deo linearna kriva.
- Aktuelna kriva nije linearna kao što je prikazano na slici.
- HE retko radi u blizu donjeg dela krive. Ona obično radi ili blizu tačke maksimalne efikasnosti ili maksimalnog protoka.
- Modelom deo po deo linearne karakteristike HE će imati tendenciju da radi u jednoj od te dve tačke.

- Kod ovog modela snaga HE u periodu j može se predstaviti kao linearna suma:

$$P_{Hj} = k_{H1}q_{j1} + k_{H2}q_{j2}$$

- Za svaki segment mora da važi:

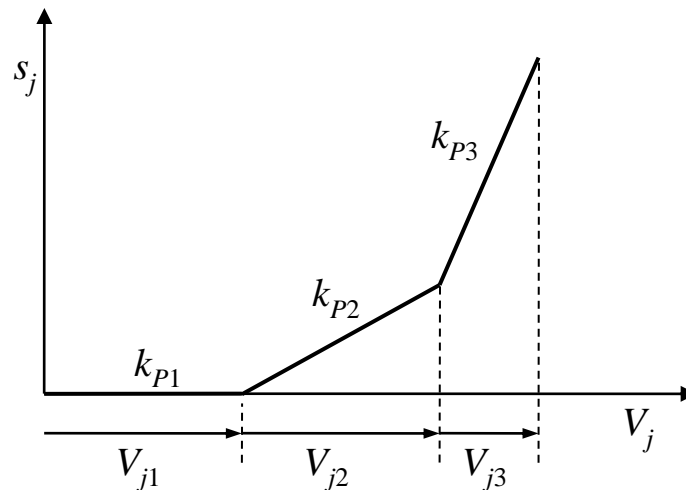
$$0 \leq q_{jk} \leq q_{jk}^{\max}, \quad k = 1, 2$$



Hidro – termo koordinacija

Linearno programiranje

- Preliv iz bazena je modelovan kao funkcija zapremine rezervoara, a pretpostavlja se da je preliv jednak 0 ako je zapremina vode u rezervoaru manja od date granice.
- Ovo se lako može modelovati deo po deo linearnom karakteristikom kao što je dato na slici.



- Sa slike se vidi da je preliv ograničen na 0 ako je zapremina vode u rezervoaru manja od prvog segmenta

Hidro – termo koordinacija

Linearno programiranje

- Preliv se, na osnovu ovog modela, može predstaviti jednačinom.

$$s_j = k_{P1}V_{j1} + k_{P2}V_{j2} + k_{P3}V_{j3}$$

- Takođe, mora se zadovoljiti ograničenje za svaki segment:

$$0 \leq V_{jk} \leq V_{jk}^{\max}, \quad k = 1, 2, 3$$

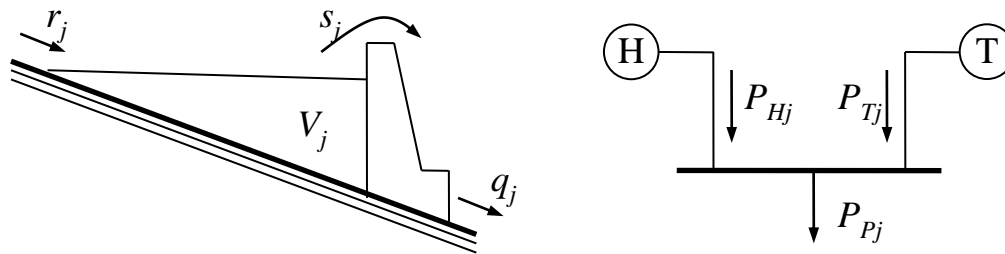
- Ukupna zapremina u intervalu j je sada:

$$V_j = V_{j1} + V_{j2} + V_{j3}$$

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna

- Za sistem sa slike rešiti problem kratkotročne hidro–termo koordinacije.



- Kriva troškova TE data je jednačinom:

$$F = 700 + 4.8P_T + 0.0005P_T^2$$

- U prethodnom izrazu snaga P_T je u MW i $200 \leq P_T \leq 1200$ MW, troškovi u NJ/h. HE je elektrana sa konstantnim padom pri čemu je zavisnost snage od protoka data izrazom:

$$P_H = 100q$$

- Snaga P_H je u MW i $0 \leq P_H \leq 200$ MW. Protok q je u 10^6 m³/h.

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna

- Preliv nije uzet u razmatranje. Početna i krajnja zapremina akumulacije je $10 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Donja granica zapremine rezervoara je $6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, a gornja $18 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.
- Potrebno je koordinisati rad ove dve elektrane u toku jednog dana (24 h) koji je podeljen na 6 pojedinačnih perioda istog trajanja od 4 h ($n_j = 4 \text{ h}$).
- Potrošnja i srednji dotoci u akumulaciono jezero su dati u tabeli:

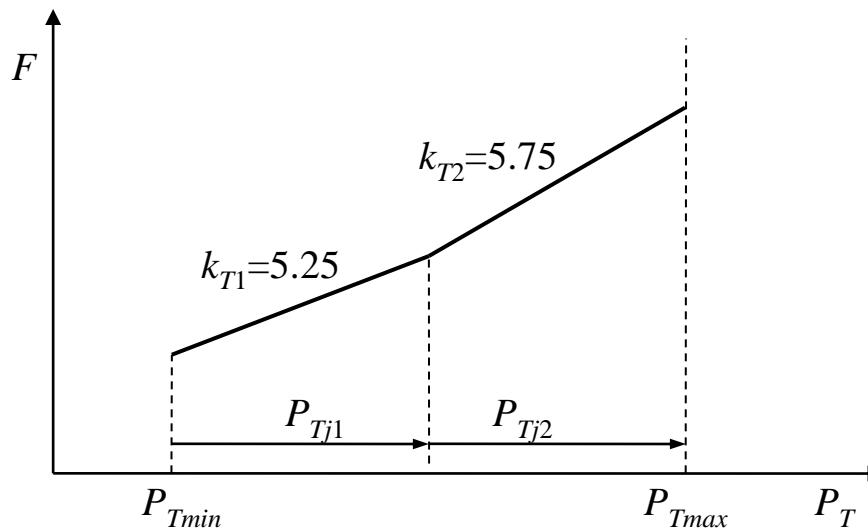
Period j	P_{Pj} [MW]	r_j [$10^6 \text{ m}^3/\text{h}$]
1	600	1
2	1000	1
3	900	1
4	500	1
5	400	1
6	300	1

- U nastavku, radi jednostavnosti, odgovarajuće veličine vezane za dotok, protok i zapreminu će se navoditi u milionima, odnosno bez člana 10^6 .

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Kriva troškova TE će se modelovati sa deo po deo linearnom karakteristikom sa dva segmenta kao što je prikazano na slici.



- Za model sa slike važi sledeće:

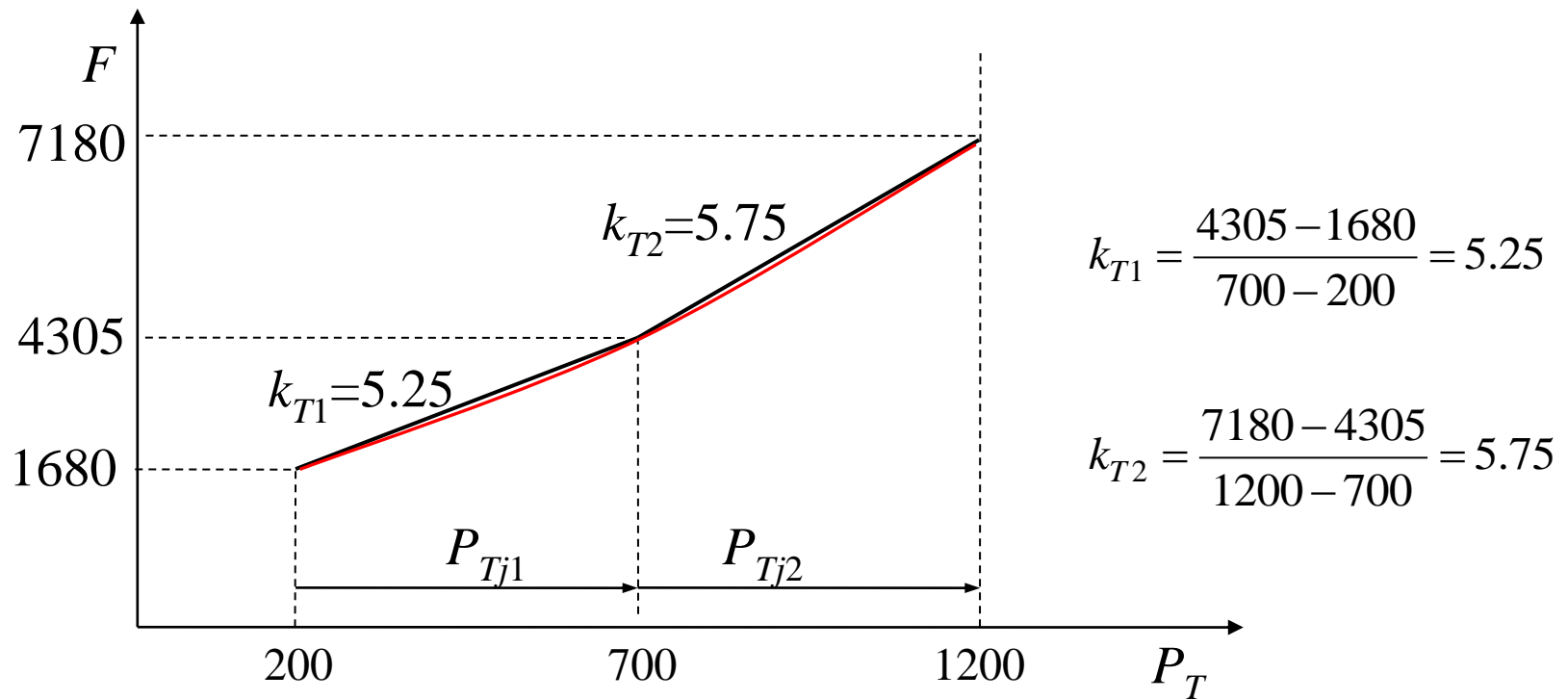
$$P_{Tmin} = 200 \text{ MW} \quad P_{Tmax} = 1200 \text{ MW}$$

$$0 \leq P_{Tj1} \leq 500 \quad 0 \leq P_{Tj2} \leq 500$$

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Detaljniji prikaz određivanja nagiba dva segmenta dat je na slici. Kriva u crvenoj boji predstavlja kvadratnu krivu troškova.



Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Kriterijumska funkcija je sada:

$$\sum_{j=1}^6 4 \cdot [F(P_{T\min}) + 5.25 \cdot P_{Tj1} + 5.75 \cdot P_{Tj2}] = 24 \cdot F(P_{T\min}) + \sum_{j=1}^6 (21 \cdot P_{Tj1} + 23 \cdot P_{Tj2})$$

- Ograničenje po bilansu rezervoara je:

$$V_j - V_{j-1} - 4 \cdot r_j + 4 \cdot q_j = 0, \quad j = 1, \dots, 6$$

odnosno

$$V_j - V_{j-1} + 4 \cdot q_j = 4, \quad j = 1, \dots, 6$$

- Broj 4 u izrazu se javlja zbog činjenice da svaki period j traje 4 časa, a dotok r_j i protok q_j kroz HE dati su po satu.
- Zapremina rezervoara na početku i kraju dana je bila $V_0 = V_6 = 10 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.
- Kod poslednje jednačine slobodan član je prebačen na desnu stranu da se forma jednačina prilagodi algoritmu linearnog programiranja.

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Bilansna jednačina po snazi je:

$$P_{Tj} + P_{Hj} - P_{Pj} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

$$P_{T_{\min}} + P_{Tj1} + P_{Tj2} + P_{Hj} - P_{Pj} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

odnosno

$$P_{Tj1} + P_{Tj2} + P_{Hj} = P_{Pj} - P_{T_{\min}}, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- I kod ovih jednačina ograničenja slobodni članovi su prebačeni na desnu stranu radi forme prilagođene LP-u.
- Funkcija snage HE od protoka je:

$$P_{Hj} = 100q_j, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

odnosno:

$$P_{Hj} - 100q_j = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Proračun će se izvršiti u Matlabu primenom ugrađene funkcije LINPROG. Ova funkcija rešava LP problem definisan na sledeći način

$$\min_x f^T x$$

pod ograničenjima

$$A \cdot x \leq b$$

$$A_{eq} \cdot x = b_{eq}$$

$$Lb \leq x \leq Ub$$

- U prethodnim jednačinama A i A_{eq} su matrice, a f , x , b , b_{eq} , Lb i Ub su odgovarajući vektori.
- Format funkcije LINPROG je:
$$[X, Fval, ExitFlag] = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq, Lb, Ub)$$
- Veličina X predstavlja vrednosti promenljivih stanja, $Fval$ je vrednost kriterijumske funkcije, a $ExitFlag$ kontrolna promenljiva.

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Pre proračuna potrebno je pripremiti podatke u potrebnoj formi. Ulazni podaci su pripremljeni u EXCEL-u. Izgled tabele sa podacima dat je na slici.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
1	F	Pt11	Pt12	Pt21	Pt22	Pt31	Pt32	Pt41	Pt42	Pt51	Pt52	Pt61	Pt62	Ph1	Ph2	Ph3	Ph4	Ph5	Ph6	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	V0	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
2		21	23	21	23	21	23	21	23	21	23	21	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3																																		
4	Aeq	Pt11	Pt12	Pt21	Pt22	Pt31	Pt32	Pt41	Pt42	Pt51	Pt52	Pt61	Pt62	Ph1	Ph2	Ph3	Ph4	Ph5	Ph6	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	V0	V1	V2	V3	V4	V5	V6	Beq	
5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	4
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	4
7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	4
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	4
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	4
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	-1	1	0	4
11		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	400
12		0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	800
13		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	700
14		0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
15		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
17		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23																																		
24		Pt11	Pt12	Pt21	Pt22	Pt31	Pt32	Pt41	Pt42	Pt51	Pt52	Pt61	Pt62	Ph1	Ph2	Ph3	Ph4	Ph5	Ph6	QB1	QB2	QB3	QB4	QB5	QB6	V0	V1	V2	V3	V4	V5	V6		
25	Lb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	6	6	6	6	6	6	10	
26	Ub	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	200	200	200	200	200	200	2	2	2	2	2	2	10	18	18	18	18	18	18	10	

Hidro – termo koordinacija

Primer LP proračuna - rešenje

- Pokretanjem programa dobijaju su rezultati dati u tabeli.

Period j	P_{Pj} [MW]	P_{Tj} [MW]	P_{Hj} [MW]	V_k [10^6 m ³]
1	600	600	0	14
2	1000	800	200	10
3	900	700	200	6
4	500	415.7	84.3	6.63
5	400	317.4	82.6	7.32
6	300	267	33	10

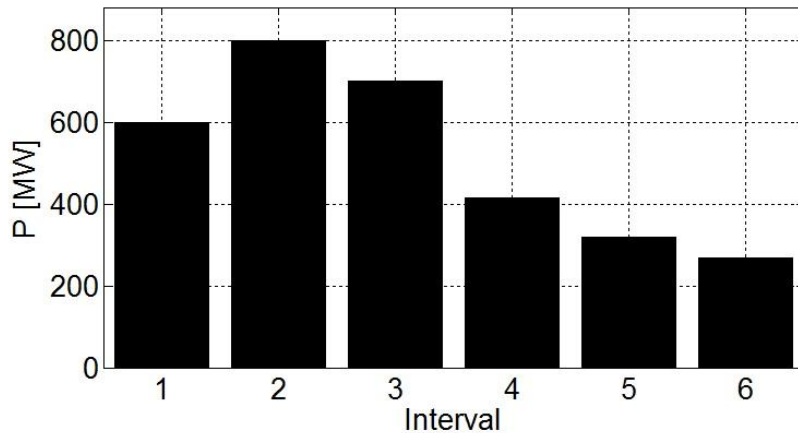
- Vrednost kriterijumske funkcije je 80420 NJ.

Hidro – termo koordinacija

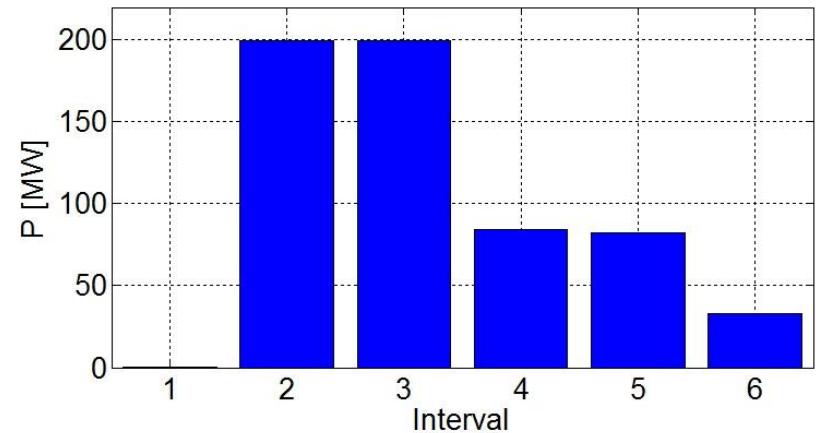
Primer LP proračuna - rešenje

- Rezultati se prikazani i na sledećim graficima

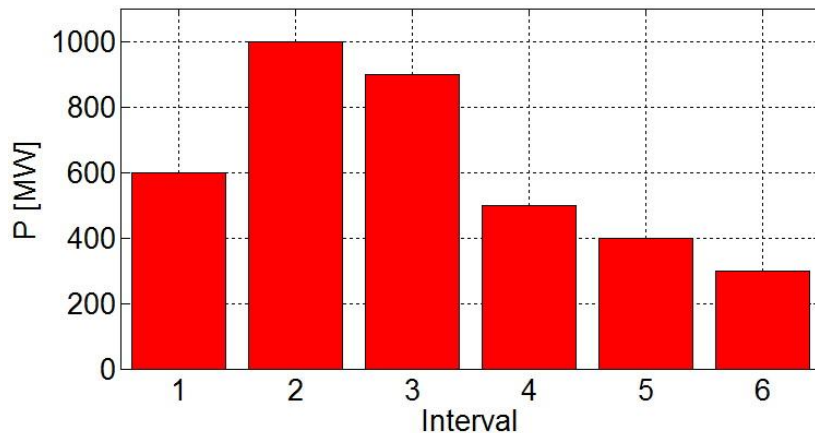
Proizvodnja TE



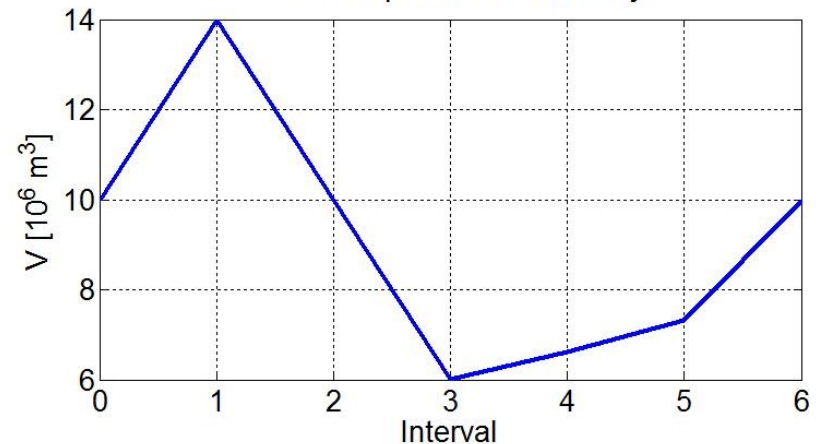
Proizvodnja HE



Dijagram potrosnje



Korisna zapremina akumulacije



Hidro – termo koordinacija

Dinamičko programiranje

- Problem kratkoročne hidro–termo koordinacije rešiće se i primenom dinamičkog programiranja (DP).
- Analiziraće se isti problem kao i u slučaju LP.
- Za razliku od LP kod ove metode nije potrebno vršiti linearizaciju karakteristika kao što su kriva troškova termo agregata i funkcija izlazne snage HE od protoka.
- Sada se mogu dati osnovne jednačine koje će se koristiti kod metode DP.
- Ako svaki interval j , traje n_j sati, zapremina vode u rezervoaru menja se prema jednačini:

$$V_j = V_{j-1} + n_j(r_j - s_j - q_j)$$

Hidro – termo koordinacija

Dinamičko programiranje

- Kao i kod LP neće se razmatrati preliv, odnosno on neće biti dozvoljen u radu HE. Ako se sa V_i i V_k označe dva različita stanja zapremine rezervoara tako da važi:

$$V_{j-1} = V_i$$

$$V_j = V_k$$

onda je protok kroz turbinu u intervalu j jednak:

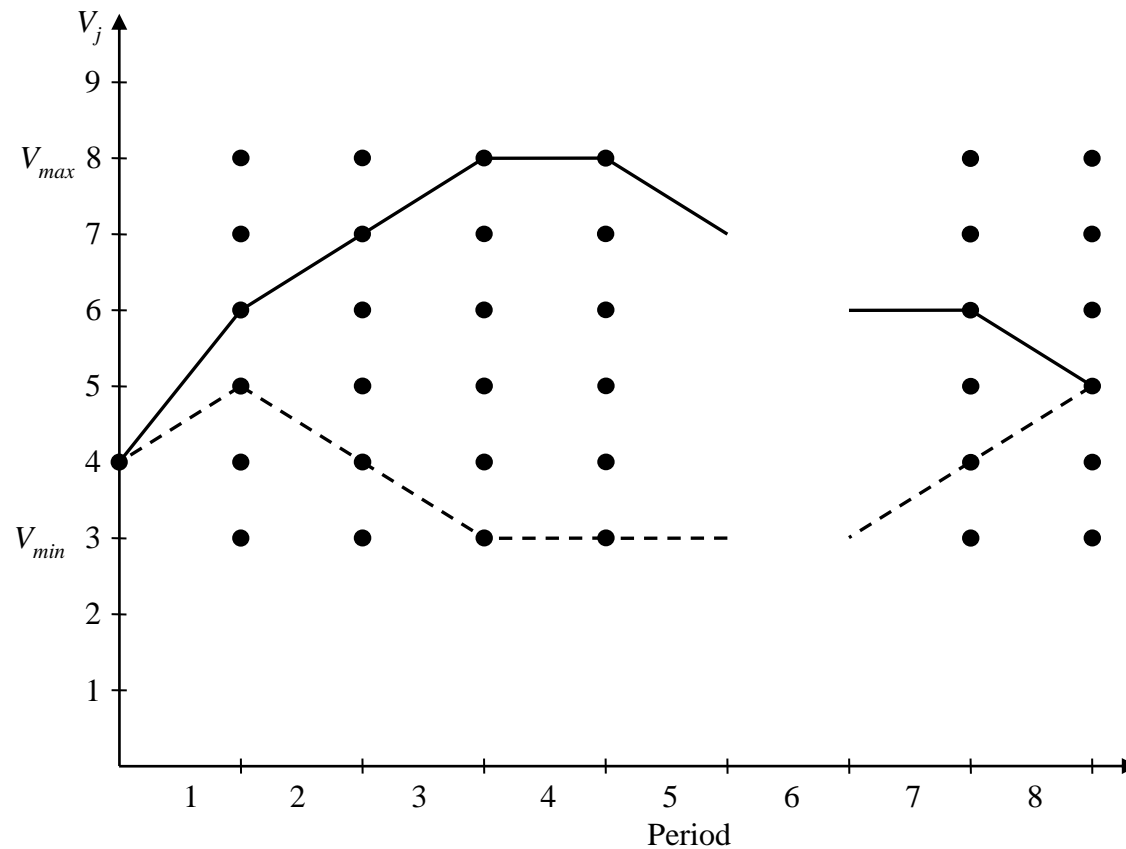
$$q_j = \frac{(V_i - V_k)}{n_j} + r_j$$

- Protok q_j mora biti veći ili jednak nuli i limitiran je maksimalnim protokom q_{max} koji odgovara maksimalnoj izlaznoj snazi HE.
- Rešavanje problema podrazumeva nalaženje puta (trajektorije) sa minimalnim troškovima, a samim tim i zapremine rezervoara na svakoj etapi.

Hidro – termo koordinacija

Dinamičko programiranje

- Kao što je ilustrovano na slici može postojati veliki broj dopustivih puteva.



Hidro – termo koordinacija

Dinamičko programiranje

- DP je u osnovi jednostavna kombinatorna metoda. Uvešće se neke veličine kako bi se pojasnila suština ove metode primenjene na ovaj problem. To su:

$\{i\}$ – stanje na početku perioda j ,

$\{k\}$ – stanje na kraju perioda j ,

$TC_k(j)$ – ukupni troškovi od početnog perioda do kraja perioda j za stanje rezervoara V_k ,

$PC(i, j-1 : k, j)$ – troškovi proizvodnje termalne jedinice u periodu j , pri promeni početne zapremine V_i do zapremine na kraju perioda V_k ,

- DP algoritam se može sada opisati jednačinama:

$$TC_k(0) = 0,$$

$$TC_k(j) = \min_{\{i\}} [TC_i(j-1) + PC(i, j-1 : k, j)]$$

Hidro – termo koordinacija

Dinamičko programiranje

- Kod rešavanja ovog problema mora se poznavati dijagram opterećenja kao i dotoci u rezervoar.
- Brzina pražnjenja kroz hidroagregat je, naravno, određena početnom i krajnjom zapreminom rezervoara, i na osnovu toga određuju se vrednosti P_H i P_T .
- Troškovi proizvodnje TE direktno se računaju pomoću krive troškova.
- Pri proračunu može se pokazati da postoje stanja zapremine V_k koja su nedostižna iz nekih početnih stanja zapremine V_i zbog ograničenja rada hidroelektrana.
- Postoje mnoge varijacije hidrauličkih ograničenja koje se mogu uključiti u DP proračun.
- Na primer, brzine protoka mogu biti konstantne tokom određenih intervala kako bi se omogućile migracije riba ili da bi se obezbedila voda za navodnjavanje.

Hidro – termo koordinacija

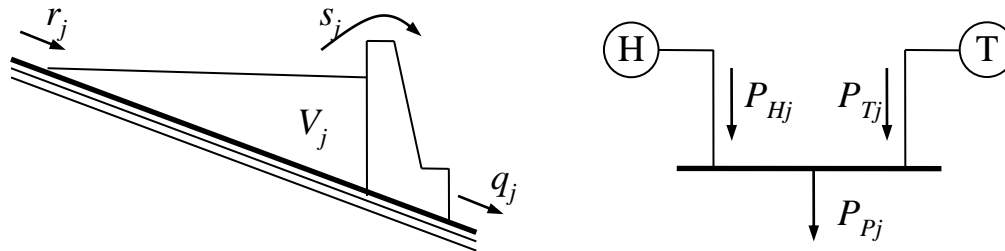
Dinamičko programiranje

- Korišćenje zapremine akumulacije kao promenljive stanja ograničava broj mogućih izlaznih snaga HE koje se razmatraju u svakoj fazi, pošto protok određuje vrednost izlazne snage.
- Ako se uzme u obzir postrojenje sa promenljivim padom, to komplikuje izračunavanje izlazne snage jer se za njeno određivanje mora koristiti prosečna visina.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna

- Uradiće se isti primer kao kod LP proračuna.
- Za sistem sa slike rešiti problem kratkotročne hidro–termo koordinacije.



- Kriva troškova TE data je jednačinom:

$$F = 700 + 4.8P_T + 0.0005P_T^2$$

- U prethodnom izrazu snaga P_T je u MW i $200 \leq P_T \leq 1200$ MW, troškovi u NJ/h. HE je elektrana sa konstantnim padom pri čemu je zavisnost snage od protoka data izrazom:

$$P_H = 100q$$

- Snaga P_H je u MW i $0 \leq P_H \leq 200$ MW. Protok q je u 10^6 m³/h.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna

- Preliv nije uzet u razmatranje. Početna i krajnja zapremina akumulacije je $10 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Donja granica zapremine rezervoara je $6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, a gornja $18 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.
- Potrebno je koordinisati rad ove dve elektrane u toku jednog dana (24 h) koji je podeljen na 6 pojedinačnih perioda istog trajanja od 4 h ($n_j = 4 \text{ h}$).
- Potrošnja i srednji dotoci u akumulaciono jezero su dati u tabeli:

Period j	P_{Pj} [MW]	r_j [$10^6 \text{ m}^3/\text{h}$]
1	600	1
2	1000	1
3	900	1
4	500	1
5	400	1
6	300	1

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Da je ovo realni problem, pretraga bi mogla da počne sa grubljom podelom za vremenske intervale i za stanje zapremine akumulacije.
- To bi omogućilo kasniju finiju potragu za optimalnom putanjom nakon što bi se grubom pretraga približili rešenju.
- Finija podela vremenskih intervala i stanja zapremine akumulacije mogla bi se iskoristiti za nalaženje bolje putanje.
- Potrebno je naglasiti da DP dobro funkcioniše za probleme sa konveksnim (konkavnim) funkcijama.
- U ovom primeru, primeniće se vremenska podela od 4 h, a podela za stanje zapremine od $2 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.
- Prema tome, moguća stanja zapremine, s obzirom na ograničenja, su $6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $10 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $12 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $14 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $16 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ i $18 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.
- U nastavku, radi jednostavnosti, odgovarajuće veličine će se navoditi u milionima, odnosno bez člana 10^6 .

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- U toku bilo kog perioda protok kroz HE je:

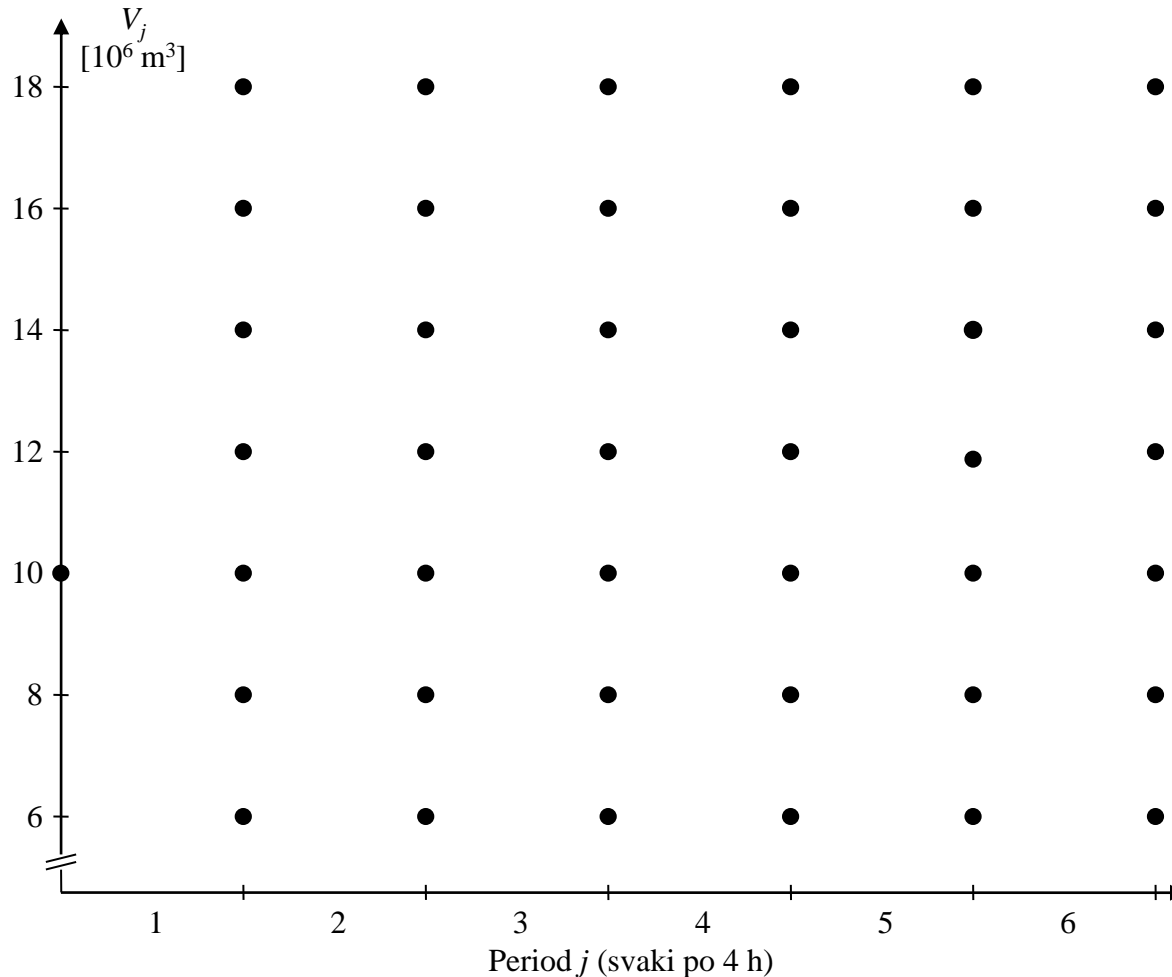
$$q_j = \frac{(V_{j-1} - V_j)}{4} + 1$$

- Protok mora biti veći ili jednak nuli i ograničen na vrednost $2 \cdot 10^6$ m³/h. U ovom primeru koristi se eksplicitna jednačina koja daje snagu HE u funkciji od protoka. Veza ove dve veličine kod DP algoritma može biti i u obliku tabele.
- DP procedura se može ilustrovati formiranjem odgovarajućih tabela. Proračun počinje od stanja rezervoara kome odgovara vrednost zapremine $V_i = 10$, odnosno $10 \cdot 10^6$ m³.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Diskretizacija u pogledu zapemine i vremena ilustrovana je na slici



Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Iz tog početnog stanja akumulacija može u toku 1. perioda, s obzirom na dotok i na moguće vrednosti protoka, da pređe u pet mogućih stanja zapremine (6, 8, 10, 12 i 14).
- Početno stanje zapremine obeleženo je sa V_i a krajnje sa V_k . To je prikazano u tabeli u prvoj i drugoj koloni.

$j = 1$		$P_p(1) = 600 \text{ MW}$			$\{i\}=10$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
14	10	0	0	600	15040	15040
12	10	0.5	50	550	13965	13965
10	10	1	100	500	12900	12900
8	10	1.5	150	450	11845	11845
6	10	2	200	400	10800	10800

Hidro – termo koordinacija

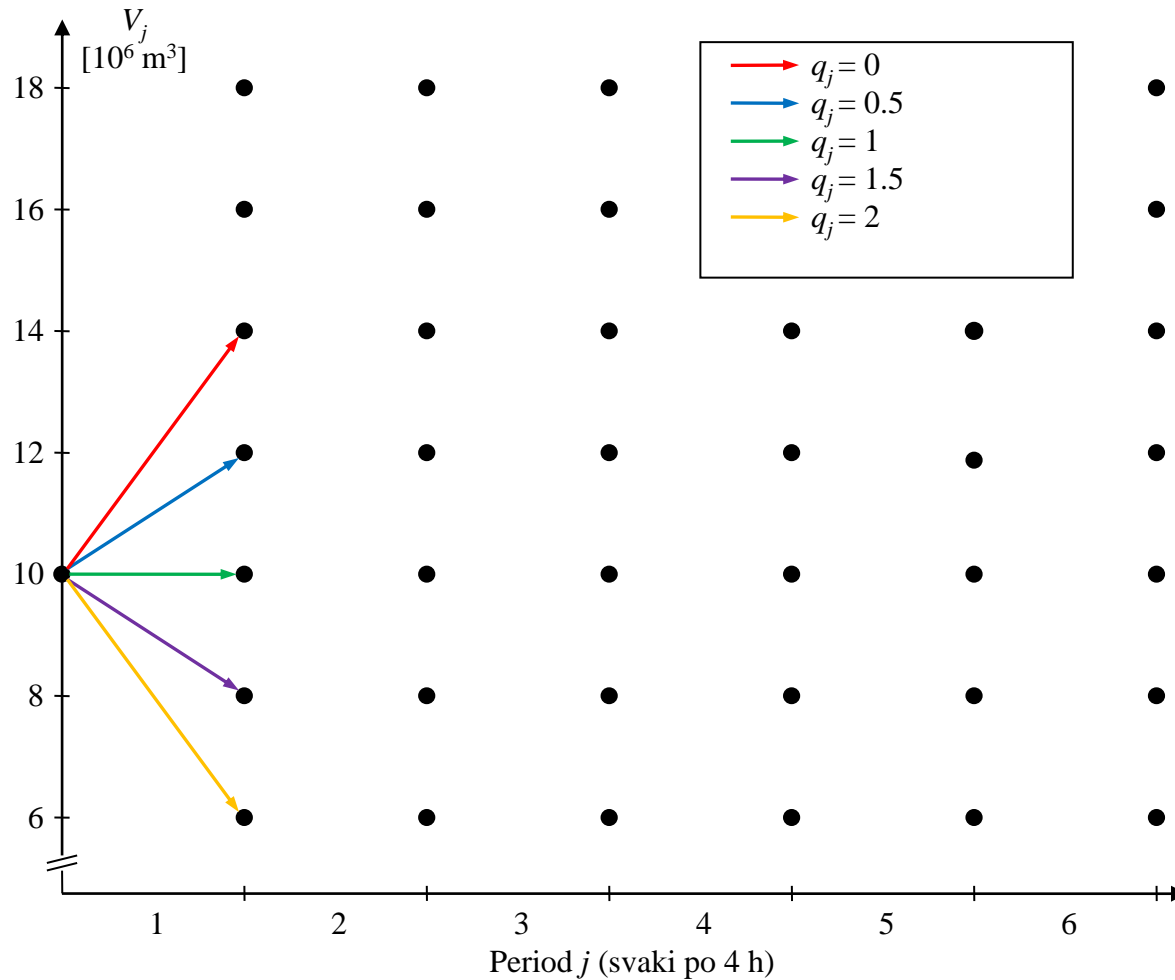
Primer DP proračuna - rešenje

- Svakom prelazu iz stanja i u stanje k odgovara vrednost protoka a samim tim i vrednost izlazne snage HE, P_H .
- Imajući u vidu balansnu jednačinu koja mora da se zadovolji, na osnovu potrošnje u 1. periodu i proizvodnje HE može se odrediti snaga TE, P_T .
- Odgovarajući protoci, i snage P_H i P_T date su takođe u tabeli.
- Na osnovu snage P_T , mogu se izračunati troškovi proizvodnje TE, odnosno troškovi prelaza iz početnog u neko od mogućih stanja (veličina PC u tabeli). I troškovi su takođe dati u tabeli.
- U poslednjoj koloni minimalna vrednost ukupnih troškova je data u crvenoj boji. Ta konvencija će se zadržati i kod analize za ostale periode.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Ova faza proračuna ilustrovana je na slici.



Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Proračun u drugom periodu je malo komplikovaniji.
- U prvom periodu bilo je samo jedno početno stanje odnosno skup početnih stanja imao je samo jedan član ($\{i\}=[10]$).
- U drugom periodu broj početnih stanja je 5 ($\{i\}=[6,8,10,12,14]$).
- Iz tih stanja može se preći u nova stanja na kraju drugog perioda.
- Svi mogući prelazi iz stanja i u stanja k sumirani su u tabeli.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

$j = 2$		$P_p(2) = 1000 \text{ MW}$			$\{i\}=[6,8,10,12,14]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
18	14	0	0	1000	24000	39040
16	14	0.5	50	950	22845	37885
	12	0	0	1000	24000	37965
14	14	1	100	900	21700	36740
	12	0.5	50	950	22845	36810
	10	0	0	1000	24000	36900
12	14	1.5	150	850	20565	35605
	12	1	100	900	21700	35665
	10	0.5	50	950	22845	35745
	8	0	0	1000	24000	35845
10	14	2	200	800	19440	34480
	12	1.5	150	850	20565	34530
	10	1	100	900	21700	34600
	8	0.5	50	950	22845	34690
	6	0	0	1000	24000	34800
8	12	2	200	800	19440	33405
	10	1.5	150	850	20565	33465
	8	1	100	900	21700	33545
	6	0.5	50	950	22845	33645
6	10	2	200	800	19440	32340
	8	1.5	150	850	20565	32410
	6	1	100	900	21700	32500

Hidro – termo koordinacija

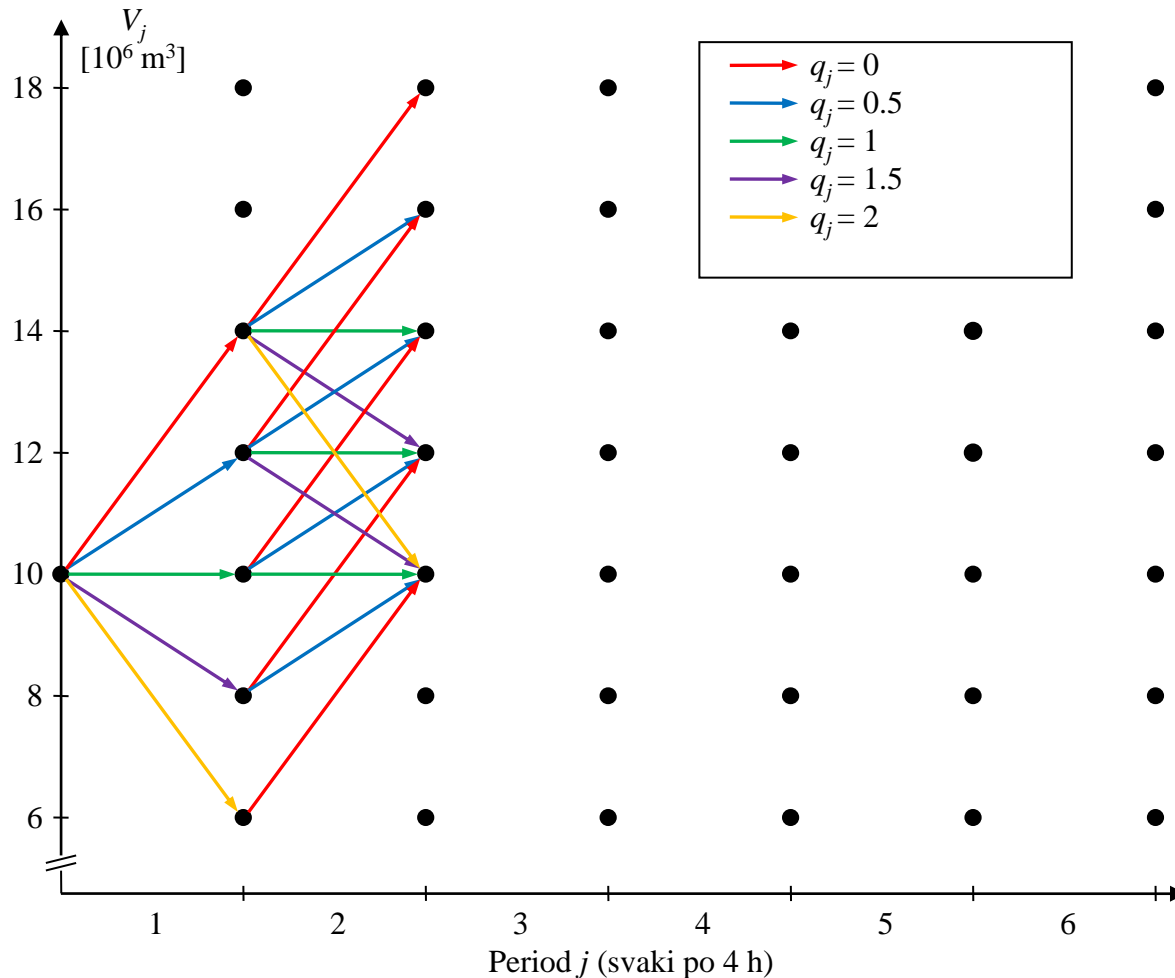
Primer DP proračuna - rešenje

- Na primer u stanje 18 može se preći samo iz stanja 14, u stanje 16 može se preći iz stanja 14 i 12, u stanje 14 može se preći iz stanja 14, 12 i 10, itd.
- Svakom prelazu odgovara vrednost protoka, snage HE i snage TE.
- Svakom prelazu odgovaraju troškovi proizvodnje TE.
- U poslednjoj koloni tabele dati su ukupni troškovi putanje od početka proračuna pa do kraja drugog perioda.
- Minimalne vrednosti troškova za odgovarajuće stanje su obojene crvenom bojom.
- Ukupni trošak (TC_k) se računa na sledeći način.
- Na primer troškovi prelaza iz stanja 14 u stanje 18 su 24000.
- Minimalni troškovi da se dođe u stanje 14 na kraju prvog perioda mogu se dobiti iz prethodne tabele i iznose 15040, pa su sada ukupni troškovi da se stigne u stanje 18 odgovarajućom putanjom jednaki 39400.
- Na ovaj način mogu se izračunati troškovi za sve putanje.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Faza proračuna ilustrovana je na slici (nisu nacrtani svi prelazi iz tabele).



Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
3. period

$j = 3$		$P_p(3) = 900 \text{ MW}$			$\{i\}=[6,8,10,12,14,16,18]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
18	18	1	100	800	19440	58480
	16	0.5	50	850	20565	58450
	14	0	0	900	21700	58440
16	18	1.5	150	750	18325	57365
	16	1	100	800	19440	57325
	14	0.5	50	850	20565	57305
	12	0	0	900	21700	57305
14	18	2	200	700	17220	56260
	16	1.5	150	750	18325	56210
	14	1	100	800	19440	56180
	12	0.5	50	850	20565	56170
	10	0	0	900	21700	56180
12	16	2	200	700	17220	55105
	14	1.5	150	750	18325	55065
	12	1	100	800	19440	55045
	10	0.5	50	850	20565	55045
	8	0	0	900	21700	55105
10	14	2	200	700	17220	53960
	12	1.5	150	750	18325	53930
	10	1	100	800	19440	53920
	8	0.5	50	850	20565	53970
	6	0	0	900	21700	54040
8	12	2	200	700	17220	52825
	10	1.5	150	750	18325	52805
	8	1	100	800	19440	52845
	6	0.5	50	850	20565	52905
6	10	2	200	700	17220	51700
	8	1.5	150	750	18325	51730
	6	1	100	800	19440	51780

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
4. period

$j = 4$		$P_p(4) = 500 \text{ MW}$			$\{i\}=[6,8,10,12,14,16,18]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
18	18	1	100	400	10800	69240
	16	0.5	50	450	11845	69150
	14	0	0	500	12900	69070
16	18	1.5	150	350	9765	68205
	16	1	100	400	10800	68105
	14	0.5	50	450	11845	68015
	12	0	0	500	12900	67945
14	18	2	200	300	8740	67180
	16	1.5	150	350	9765	67070
	14	1	100	400	10800	66970
	12	0.5	50	450	11845	66890
	10	0	0	500	12900	66820
12	16	2	200	300	8740	66045
	14	1.5	150	350	9765	65935
	12	1	100	400	10800	65845
	10	0.5	50	450	11845	65765
	8	0	0	500	12900	65705
10	14	2	200	300	8740	64910
	12	1.5	150	350	9765	64810
	10	1	100	400	10800	64720
	8	0.5	50	450	11845	64650
	6	0	0	500	12900	64600
8	12	2	200	300	8740	63785
	10	1.5	150	350	9765	63685
	8	1	100	400	10800	63605
	6	0.5	50	450	11845	63545
6	10	2	200	300	8740	62660
	8	1.5	150	350	9765	62570
	6	1	100	400	10800	62500

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
5. period

$j = 5$		$P_p(5) = 400 \text{ MW}$			$\{i\} = [6, 8, 10, 12, 14, 16, 18]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i, j-1: k, j)$	$TC_k(j)$
14	18	2	200	200	6720	75790
	16	1.5	150	250	7725	75670
	14	1	100	300	8740	75560
	12	0.5	50	350	9765	75470
	10	0	0	400	10800	75400
12	16	2	200	200	6720	74665
	14	1.5	150	250	7725	74545
	12	1	100	300	8740	74445
	10	0.5	50	350	9765	74365
	8	0	0	400	10800	74345
10	14	2	200	200	6720	73540
	12	1.5	150	250	7725	73430
	10	1	100	300	8740	73340
	8	0.5	50	350	9765	73310
	6	0	0	400	10800	73300
8	12	2	200	200	6720	72425
	10	1.5	150	250	7725	72325
	8	1	100	300	8740	72285
	6	0.5	50	350	9765	72265
6	10	2	200	200	6720	71320
	8	1.5	150	250	7725	71270
	6	1	100	300	8740	71240

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Proračun u poslednjem intervalu dat je u tabeli.

$j = 6$		$P_p(6) = 300 \text{ MW}$			$\{i\} = [6, 8, 10]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i, j-1; k, j)$	$TC_k(j)$
	10	1	100	200	6720	80020
10	8	0.5	50	250	7725	79990
	6	0	0	300	8740	79980

- Po uslovu zadatka zapremina rezervoara na kraju ovog intervala jednaka je 10.
- Zbog ograničenja rada termo agregata u ovo stanje može se preći samo iz tri prethodna stanja. To su stanja 10, 8 i 6.
- Minimalna vrednost u poslednjoj koloni tabele predstavlja minimalnu vrednost putanje od početka 1. perioda do kraja 6. perioda, odnosno u toku 24-časovnog perioda.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Sada se vraćanjem unazad kroz tabele može odrediti optimalna putanja. Iz tabele za 6. period vidi se da se minimalna vrednost ima za prelaz iz stanja 6 u stanje 10.

$j = 6$		$P_p(6) = 300 \text{ MW}$			$\{i\}=[6,8,10]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
	10	1	100	200	6720	80020
10	8	0.5	50	250	7725	79990
	6	0	0	300	8740	79980

- Sada je potrebno videti u 5. periodu koji je optimalni prelaz u stanje 6. Može se videti da je to prelaz is stanja 6.
- Isti rezon može da se primeni i na ostale periode.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
5. period

$j = 5$		$P_p(5) = 400 \text{ MW}$			$\{i\} = [6, 8, 10, 12, 14, 16, 18]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i, j-1: k, j)$	$TC_k(j)$
14	18	2	200	200	6720	75790
	16	1.5	150	250	7725	75670
	14	1	100	300	8740	75560
	12	0.5	50	350	9765	75470
	10	0	0	400	10800	75400
12	16	2	200	200	6720	74665
	14	1.5	150	250	7725	74545
	12	1	100	300	8740	74445
	10	0.5	50	350	9765	74365
	8	0	0	400	10800	74345
10	14	2	200	200	6720	73540
	12	1.5	150	250	7725	73430
	10	1	100	300	8740	73340
	8	0.5	50	350	9765	73310
	6	0	0	400	10800	73300
8	12	2	200	200	6720	72425
	10	1.5	150	250	7725	72325
	8	1	100	300	8740	72285
	6	0.5	50	350	9765	72265
6	10	2	200	200	6720	71320
	8	1.5	150	250	7725	71270
	6	1	100	300	8740	71240

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
4. period

$j = 4$		$P_p(4) = 500 \text{ MW}$			$\{i\}=[6,8,10,12,14,16,18]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
18	18	1	100	400	10800	69240
	16	0.5	50	450	11845	69150
	14	0	0	500	12900	69070
16	18	1.5	150	350	9765	68205
	16	1	100	400	10800	68105
	14	0.5	50	450	11845	68015
	12	0	0	500	12900	67945
14	18	2	200	300	8740	67180
	16	1.5	150	350	9765	67070
	14	1	100	400	10800	66970
	12	0.5	50	450	11845	66890
	10	0	0	500	12900	66820
12	16	2	200	300	8740	66045
	14	1.5	150	350	9765	65935
	12	1	100	400	10800	65845
	10	0.5	50	450	11845	65765
	8	0	0	500	12900	65705
10	14	2	200	300	8740	64910
	12	1.5	150	350	9765	64810
	10	1	100	400	10800	64720
	8	0.5	50	450	11845	64650
	6	0	0	500	12900	64600
8	12	2	200	300	8740	63785
	10	1.5	150	350	9765	63685
	8	1	100	400	10800	63605
	6	0.5	50	450	11845	63545
6	10	2	200	300	8740	62660
	8	1.5	150	350	9765	62570
	6	1	100	400	10800	62500

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
3. period

$j = 3$		$P_p(3) = 900 \text{ MW}$			$\{i\}=[6,8,10,12,14,16,18]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i,j-1:k,j)$	$TC_k(j)$
18	18	1	100	800	19440	58480
	16	0.5	50	850	20565	58450
	14	0	0	900	21700	58440
16	18	1.5	150	750	18325	57365
	16	1	100	800	19440	57325
	14	0.5	50	850	20565	57305
	12	0	0	900	21700	57305
14	18	2	200	700	17220	56260
	16	1.5	150	750	18325	56210
	14	1	100	800	19440	56180
	12	0.5	50	850	20565	56170
	10	0	0	900	21700	56180
12	16	2	200	700	17220	55105
	14	1.5	150	750	18325	55065
	12	1	100	800	19440	55045
	10	0.5	50	850	20565	55045
	8	0	0	900	21700	55105
10	14	2	200	700	17220	53960
	12	1.5	150	750	18325	53930
	10	1	100	800	19440	53920
	8	0.5	50	850	20565	53970
	6	0	0	900	21700	54040
8	12	2	200	700	17220	52825
	10	1.5	150	750	18325	52805
	8	1	100	800	19440	52845
	6	0.5	50	850	20565	52905
6	10	2	200	700	17220	51700
	8	1.5	150	750	18325	51730
	6	1	100	800	19440	51780

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

Tabela za
2. period

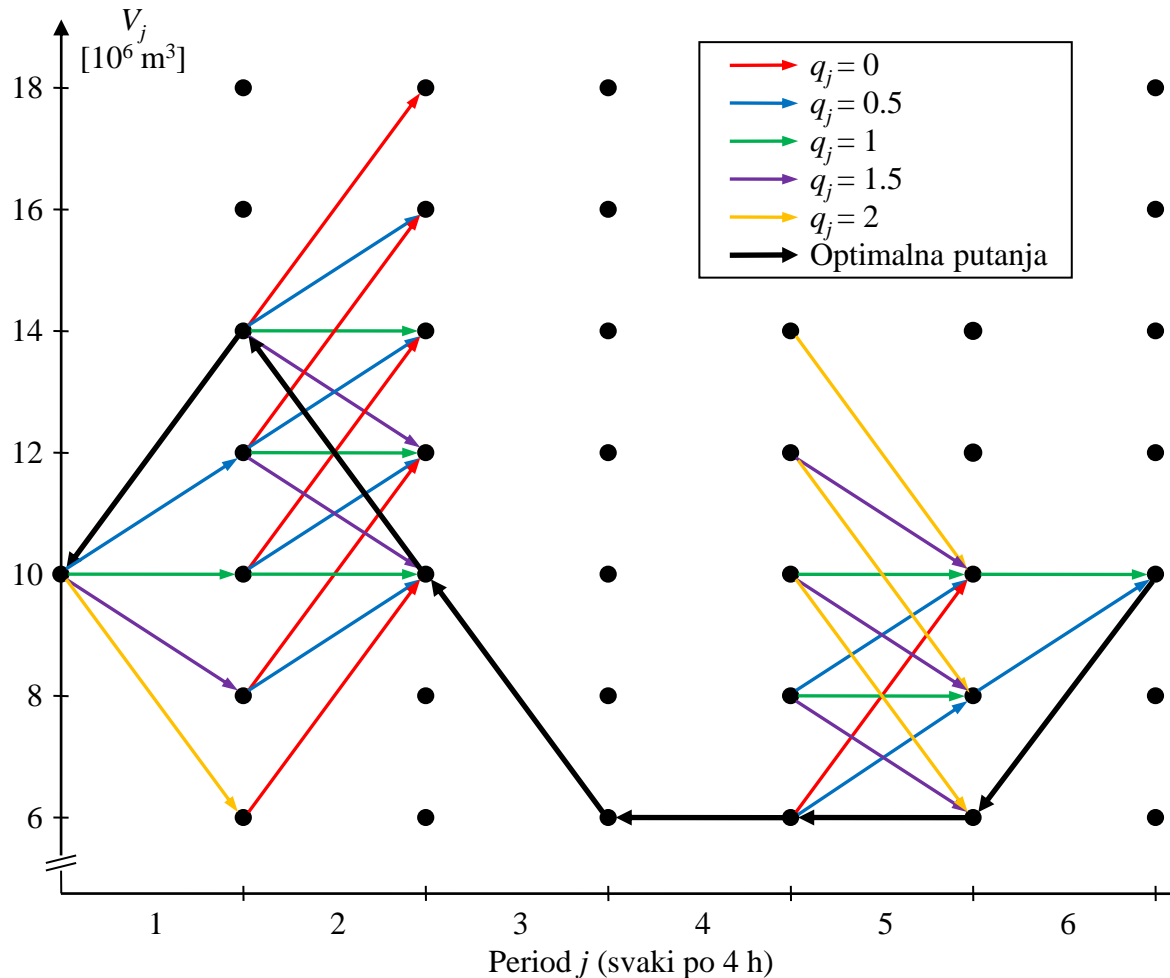
$j = 2$		$P_p(2) = 1000 \text{ MW}$			$\{i\} = [6, 8, 10, 12, 14]$	
V_k	V_i	q	P_H	P_T	$PC(i, j-1: k, j)$	$TC_k(j)$
18	14	0	0	1000	24000	39040
16	14	0.5	50	950	22845	37885
	12	0	0	1000	24000	37965
14	14	1	100	900	21700	36740
	12	0.5	50	950	22845	36810
	10	0	0	1000	24000	36900
12	14	1.5	150	850	20565	35605
	12	1	100	900	21700	35665
	10	0.5	50	950	22845	35745
	8	0	0	1000	24000	35845
10	14	2	200	800	19440	34480
	12	1.5	150	850	20565	34530
	10	1	100	900	21700	34600
	8	0.5	50	950	22845	34690
	6	0	0	1000	24000	34800
8	12	2	200	800	19440	33405
	10	1.5	150	850	20565	33465
	8	1	100	900	21700	33545
	6	0.5	50	950	22845	33645
6	10	2	200	800	19440	32340
	8	1.5	150	850	20565	32410
	6	1	100	900	21700	32500

- Konačno u stanje 14 u prvom periodu moglo se preći samo iz stanja 10. To je stanje od koga je i krenuo proračun. Na taj način dobijena je optimalna putanja.

Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Optimalna putanja prikazana je na slici.



Hidro – termo koordinacija

Primer DP proračuna - rešenje

- Na osnovu stanja zapremine i protoka u pojedinim periodima može se odrediti snaga proizvodnje HE, a samim tim i proizvodnja TE. Rezultati se mogu sumirati u tabeli.

Period j	P_{Pj} [MW]	P_{Tj} [MW]	P_{Hj} [MW]	V_k [10^6 m ³]
1	600	600	0	14
2	1000	800	200	10
3	900	700	200	6
4	500	400	100	6
5	400	300	100	6
6	300	300	0	10

- Vrednost kriterijumske funkcije je 79980 NJ.